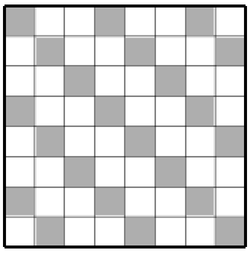
Przed 2 etapem LX OM — Rozwiązania

Dzień 1

1. Na prostej CD po przeciwnej stronie punktu C niech E' będzie punktem takim, że $DE' = BE$. Wówczas $\Delta ADE' \equiv \Delta ABE$ (cecha *bok–kąt–bok*), więc $\angle FAE' = \angle FAD + \angle DAE' = \angle FAD + \angle BAE = 45°$. To w połączeniu z $AE = AE'$ daje (znowu wobec cechy *bok–kąt–bok*), że $\Delta FAE' \equiv \Delta FAE$, więc $BE + FD = DE' + FD = FE' = FE$.

2. Mamy $10^{2009}+1 = 10^{7\cdot 278}+1 = (10^{278}+1)(1+10^{278}+(10^{278})^2+\ldots+(10^{278})^6)$, więc podana liczba jest złożona.

3. Tak naprawdę wystarczy rozumieć jak obliczyć ile jest funkcji niemalejących $f : \{1, 2, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$. To robi się np. przez takie kodowanie: każdej takiej funkcji niemalejącej wzajemnie jednoznacznie odpowiada rozmieszczenie m identycznych kul w n ponumerowanych szufladach, czyli ciąg zero–jedynkowy złożony z m zer (kule) i $n-1$ jedynek (przegródki między kolejnymi szufladami). Takich ciągów jest oczywiście $\binom{m+n-1}{m}$. To, że funkcja ma przyjmować wartość 5 oznacza, że w szufladzie nr 5 musi się znajdować co najmniej jedna kula, więc szukana liczba funkcji to (liczba kul do rozłożenia maleje o 1 i wynosi $10-1$) $\binom{(10-1)+(10-1)}{10-1}$.



4. Załóżmy, że udało się pokryć danymi klockami szachownicę. Kolorujemy 22 pola szchownicy jak na rysunku (na szaro). Każdy klocek 3x1 przykrywa dokładnie jedno zamalowane pole. Tych klocków jest 21, więc klocek 1x1 musi leżeć na zamalowanym polu. Wykonując symetryczne (dokładniej, środkowo–symetryczne, względem środka szachownicy) kolorowanie (w drugim kierunku) na zielono widać już łatwo, że klocek 1x1 musi leżeć na jednym z czterech pól (wymienionych w tezie zadania) zamalowanym obydwoma kolorami. Z drugiej strony łatwo sprawdzić, że jeśli leży on już na jednym z tych pól, to pokrycie szachownicy klockami jest wykonalne.

5. Na podstawie cechy *kąt–kąt–kąt* z założeń zadania wynika podobieństwo $\Delta ABM \sim \Delta DAM$. Zatem $\frac{AM}{BM} = \frac{DM}{AM}$. Ale $AM = MC$, więc z poprzedniej równości i równości kątów $\angle BMC = \angle CMD$ mamy (cecha *kąt–bok–kąt*) $\Delta BMC \sim \Delta CMD$. Stąd $\angle BCD = 180° - \angle BMC = 180° - \angle BAD$, czyli na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Przed 2 etapem LX OM — Rozwiązania

Dzień 2

6. Stosujemy niezawodną sztuczkę *dodać–odjąć*

$$x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-(2x)^2 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2) = ((x-1)^2+1)((x+1)^2+1),$$

skąd widać, że liczba x^4+4 jest złożona wtedy i tylko wtedy, gdy $(x-1)^2+1 > 1$ i $(x+1)^2+1 > 1$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x \neq \pm 1$.

7. Wystarczy udowodnić, że trójkąt ADI jest równoramienny. Mamy (kąt zewnętrzy w trójkącie jest sumą pozostałych kątów wewnętrznych) $\angle AID = \angle IAC + \angle ACI$, ale $\angle IAC = \angle IAB$, $\angle ACI = \angle ICB = \angle DAB$, więc $\angle AID = \angle IAB + \angle DAB = \angle IAD$, a to chcieliśmy wykazać.

Uwaga. To zadanie pokazuje jak jednym ruchem cyrkla wyznaczyć środek okręgu wpisanego w okąg mając już narysowany trójkąt, okrąg opisany i dwusieczną.

8. Wystarczy zauważyć, że przy każdym posunięciu skoczek zmienia kolor pola na którym stoi. Zatem jeśli stoi np. na czarnym rogu szachownicy, to po 2009 ruchach będzie stał na białym polu, czyli nie jest możliwe, aby przeszedł do przeciwległego rogu ani też wrócił do punktu wyjścia. Ale sąsiedni róg jest biały. Nietrudno znaleźć dla skoczka ścieżkę długości 2009 prowadzącą doń.

9. Można sprawdzić, że podana nierówność jest równoważna następującej

$$abc \geqslant (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Jeśli dokładnie jeden nawias z prawej strony jest ujemny, to nierówność jest oczywista. Dwa nawiasy nie mogą być jednocześnie ujemne, bo dodając je mamy sprzeczność (np. jeśli $a+b-c<0$, $a-b+c<0$, to po dodaniu $2a<0$ — sprzeczność). Zatem możemy dalej bez utraty ogólności zakładać, że każdy z nawiasów po prawej jest nieujemny. Wówczas z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dostajemy

$$\begin{aligned}&(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)} \times \\ &\sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)} \cdot \sqrt{(a-b+c)(a+b-c)} \leqslant \\ &\frac{(-a+b+c)+(a-b+c)}{2} \cdot \frac{(-a+b+c)+(a+b-c)}{2} \times \\ &\frac{(a-b+c)+(a+b-c)}{2} = abc.\end{aligned}$$

10. Oznaczmy przez I środek danego okręgu wpisanego w czworokąt $PNSM$, przez r jego promień i przez X, Y punkt styczności tego okręgu z bokiem MS, MP odpowiednio. Mamy $\Delta PIY \sim \Delta DPA$, więc $PY = IY\frac{DA}{PA} = 2r$. Ponadto $SX = r$ (dlaczego?), więc $MP - MS = PY + YM - (MX + SX) = 2r + YM - MX - r = r$, bo $MY = MX$ (*najmocniejsze twierdzenie geometrii*).