Przed 2 etapem LX OM

Dzień 1

1. Na bokach BC, CD kwadratu $ABCD$ wybrano punkty E, F takie, że $\angle EAF = 45°$. Udowodnić, że $BE + DF = EF$.

2. Czy $10^{2009} + 1$ jest liczbą złożoną?

3. Obliczyć ile jest funkcji $f : \{1, 2, \ldots, 10\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, 10\}$ niemalejących i przyjmujących wartość 5.

4. Dane są: jeden klocek 1x1 i dwadzieścia jeden klocków 3x1. Udowodnić, że tymi klockami można pokryć szachownicę 8x8 (klocki 3x1 można kłaść poziomo lub pionowo) wtedy i tylko wtedy, gdy klocek 1x1 położony jest na jednym z pól $C3$, $F3$, $C6$ lub $F6$.

5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem przekątnej AC. Wykazać, że jeśli $\angle BAD = \angle BMC = \angle CMD$, to punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.

Przed 2 etapem LX OM

Dzień 2

6. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite x, że liczba $x^4 + 4$ jest złożona.

7. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś D niech będzie punktem przecięcia dwusiecznej CI z okręgiem opisanym na tym trójkącie. Udowodnić, że $AD = DI$.

8. Konik szachowy znajduje się w rogu szachownicy. Czy może on w 2009 ruchach prześć do przeciwległego rogu? A do sąsiedniego rogu szachownicy? Czy może wrócić w tylu posunięciach do punktu wyjścia?

9. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych a, b, c zachodzi

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

10. Dany jest kwadrat $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie S. Niech P będzie środkiem boku AB oraz niech odcinki CP, DP przecinają przekątne BD, AC odpowiednio w punktach M i N. Udowodnić, że promień okręgu wpisanego w czworokąt $PNSM$ wynosi $MP - MS$.