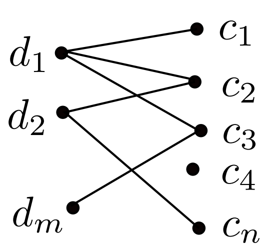
Twierdzenie Halla o małżeństwach

Tomasz Tkocz

Streszczenie. Notatki te, przygotowane do referatu wygłoszonego na kółku w II LO w Rybniku, pokazują jak można rozwiązywać życiowe problemy oraz te bardziej abstrakcyjne, jak np. uzupełnianie prostokątów łacińskich, przy użyciu kombinatorycznego twierdzenia *o małżeństwach*. Autor oparł je w całości na odpowiednim rozdziale z książki [**Wil**].

1. Wstęp



Wyobraźmy sobie, że mamy m dziewczyn i pewną liczbę chłopców. Każda dziewczyna chce wyjść za mąż, przy czym każda z nich godzi się poślubić tylko pewnych chłopców spośród wszystkich. Chłopcy natomiast nie mają nic do gadania. Jeśli jakaś go chce, to bierze on ją bez zastanowienia. Kiedy uda się tak dobrać mężów, aby każda dziewczyna poślubiła dokładnie jednego i, oczywiście, każda innego? Oczywisty warunek konieczny jest taki, aby dowolne k dziewcząt, $1 \leqslant k \leqslant m$, godziło się łącznie poślubić co najmniej k chłopców. Nazwijmy to warunkiem **kojarzenia małżeństw**. Okazuje się, że jest o to już warunek wystarczający do istnienia skojarzenia. Jest to treść tytułowego twierdzenia, pochodzącego z 1935r. od Philipa Halla[1]

2. Dowód twierdzenia

Podamy teraz sobie dowód tego dziwnego rezultatu. Będzie on przebiegał indukcyjnie, a pochodzi od P. Halmosa i H. E. Vaughana.

[1]Philip Hall (1904–1982) — angielski matematyk, pracował na Uniwersytecie w Cambridge; zajmował się głównie teorią grup, w szczególności skończonych i rozwiązalnych.

Twierdzenie 1 (Hall, 1935). *Problem kojarzenia małżeństw z m dziewczynami ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek kojarzenia małżeństw*
(∗)
każde k dziewczyn, $1 \leqslant k \leqslant m$, zna łącznie nie mniej niż k chłopców.

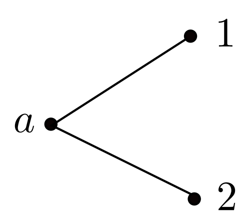
Dowód. Indukcja po m. Dla $m = 1$ wszystko jasne — dziewczyna wychodzi za mąż za swojego znajomego (ma przynajmniej jednego z założenia) i już. Załóżmy teraz, że mamy $m > 1$ dziewcząt. Są możliwe tylko dwa przypadki

1° *każde* k dziewcząt, dla każdego $k < m$, zna łącznie przynajmniej $k+1$ chłopców (jeden jest zawsze w zapasie). Robimy tak. Bierzemy pewną dziewczynę i wydajemy ją za mąż za pewnego jej znajomego. Dla pozostałych $m - 1$ dziewcząt i pozostałych chłopców warunek (∗) jest nadal spełniony (jeden chłopiec był zawsze w zapasie), więc wydajemy je szczęśliwie za mąż na mocy założenia indukcyjnego. Wszyscy są zadowoleni.

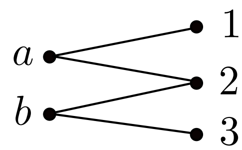
2° Pewien zbiór k dziewcząt zna dokładnie k chłopców, dla pewnego $k < m$. Wydajemy je za nich za mąż wobec założenia indukcyjnego. Dla pozostałej grupy $m - k$ dziewcząt i pozostałych (= nie ożenionych) chłopców (∗) też zachodzi. No, bo gdyby pewne $l \leqslant m - k$ dziewcząt wśród tych pozostałych chłopców znało ich łącznie mniej jak l, to one wraz z już wybranymi k dziewczynami, czyli $l + k$ dziewczyn, znałoby łącznie mniej jak $l + k$ chłopców, co przeczy założeniu. Zatem pozostałe $m - k$ dziewczyn też się uda indukcyjnie wydać za mąż za pozostałych chłopców.

□

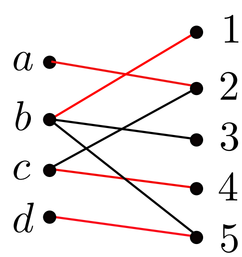
Możemy spojrzeć teraz na rysunki i przykłady różnych grafów znajomości i różnych skojarzeń lub ich brak.



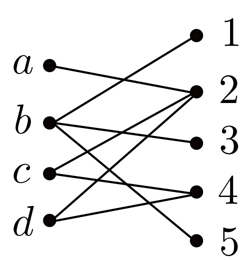
Rysunek 1. $m = 1$



Rysunek 2. $m = 2$



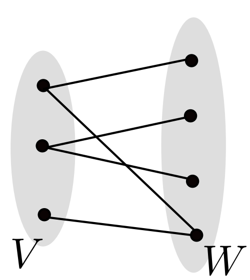
Rysunek 3. $m = 4$



Rysunek 4. Nie ma skojarzenia, bo $\{a, c, d\}$ zna tylko $\{2, 4\}$

3. Inne sformułowania

Popatrzymy teraz na twierdzenie Halla w innych językach. Trochę mniej życiowo i mniej po ludzku. Ale przyda nam się to w zastosowaniach. Najpierw powiemy sobie w języku kropek i kresek, czyli grafów. Rozważmy graf **dwudzielny** $G = G(V, W; E)$, czyli zbiór wierzchołków (kropek) $V \cup W$ i krawędzi E (kresek łączących kropki), przy czym krawędzie są tylko tego typu, że jeden koniec ma



w V, a drugi w W. **Skojarzeniem z V do W** w G nazywamy taką funkcję różnowartościową $f\colon V \longrightarrow W$, że wierzchołki v i $f(v)$ są połączone krawędzią. Twierdzenie Halla można wypowiedzieć następująco

Twierdzenie 2 (Hall, wersja grafowa). *W grafie dwudzielnym $G = G(V, W; E)$ istnieje skojarzenie z V do W wtedy i tylko wtedy, gdy*[2]

$$(**) \qquad |A| \leqslant |Z(A)|, \quad \textit{dla każdego podzbioru } A \textit{ zbioru } V,$$

gdzie $N(A)$ (znajomi zbioru A) oznacza zbiór wierzchołków z W będących końcami krawędzi o początkach w A.

Do tego samego można też podejść mówiąc o rodzinach zbiorów. Załóżmy, że mamy rodzinę niepustych podzbiorów $\mathscr{F} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ pewnego ustalonego zbioru X (S_i to zbiór chłopców, których godzi się wziąć za męża i-ta dziewczyna). Rodzina $\mathscr{F}$ ma **transwersalę**, gdy istnieje m-elementowy podzbiór $\{x_1, \ldots, x_n\}$ zbioru X taki, że $x_i \in S_i$ (czyli po ludzku, gdy dla każdej dziewczyny można wybrać innego męża.)

Twierdzenie 3 (Hall, wersja traswersalowa). *Rodzina $\mathscr{F} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ niepustych podzbiorów zbioru X ma transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(***) \quad \textit{dla każdego zbioru indeksów } I \subset \{1, \ldots, m\} \quad |I| \leqslant \left|\bigcup_{i \in I} S_i\right|.$$

Przykład 1. a) Rodzina $\mathscr{F} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ ma transwersalę (i to nie jedną!).
b) Rodzina $\mathscr{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$ nie ma transwersali.

4. Zastosowania

Kilka ładnych życiowych przykładów użycia twierdzenia Halla zobaczymy w zadaniach. Tutaj zobaczymy jak ładnie ono pracuje przy kombinatoryczno - teorio liczbowym problemie kwadratów łacińskich. **Prostokątem łacińskim** wymiaru $m \times n$ nazywamy tablicę mn liczb całkowitych $1, \ldots, n$ o tej własności, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdują się liczby parami różne. **Kwadratem łacińskim** $n \times n$ nazywamy oczywiście prostokąt łaciński wymiaru $n \times n$.

Przykład 2. 1. Jeśli prostokąt łaciński ma wymiary $m \times n$, to $m \leqslant n$.

[2] $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A; np. $|\{\clubsuit, \Diamond\}| = 2$.

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nasuwa się pytanie, czy każdy prostokąt łaciński można uzupełnić do kwadratu łacińskiego (dodając odpowiednią liczbę wierszy)? Zaskakujące jest to, że i owszem! Uzasadnienie zaś przynosi twierdzenie Halla w wersji z transwersalami. Nietrudno spostrzec, że wystarczy udowodnić coś takiego

Twierdzenie 4. *Do każdego prostokąta łacińskiego wymiaru $m \times n$, $m < n$, można dodać wiersz tak, aby dostać prostokąt łaciński wymiaru $(m+1) \times n$.*

Dowód. Niech $\mathscr{F} = \{S_1, \ldots, S_n\}$, gdzie S_i to podzbiór zbioru liczb $\{1, \ldots, n\}$, które **nie** występują w i-tej kolumnie wyjściowego prostokąta. Jest jasne, że transwersala rodziny $\mathscr{F}$ daje szukany wiersz. Ona natomiast istnieje wobec twierdzenia Halla. Wystarczy bowiem sprawdzić, czy dla dowolnego $I \subset \{1, \ldots, n\}$ mamy $|I| \leqslant \left|\bigcup_{i \in I} S_i\right|$. Ale ta suma $\bigcup_{i \in I} S_i$, wliczając powtórzenia, zawiera dokładnie $|I|(n-m)$ elementów. Gdyby było więc w tej sumie mniej jak $|I|$ elementów, to któryś powtórzyłby się więcej jak $n-m$ razy. Tymczasem w pełnej sumie $\bigcup_{i \in I} S_i$ każda liczba $1, \ldots, n$ powtarza się $n-m$ razy, bo prostokąt jest łaciński. Sprzeczność kończy dowód. $\square$

5. Zadania

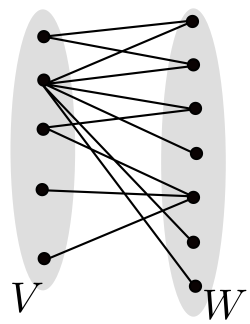
1. Przypuśćmy, że dziewczyny a, b, c znają chłopców $1, 2, 3, 4$ według tabeli

a	$1, 2, 3$
b	$2, 4$
c	$2, 3$

a) Narysować graf dwudzielny opisujące te znajomości
b) Sprawdzić warunek skojarzenia małżeństw dla tych znajomości
c) Wypisać pięć różnych skojarzeń

2. Budowlaniec poszukuje malarza, cieśli, hydraulika i ślusarza. Otrzymuje zgłoszenia od pięciu osób: murarza, cieśli, osoby z kwalifikacjami murarza i hydraulika, dwóch osób, które mogą pracować jako hydraulicy i ślusarza. Czy budowlaniec ruszy z robotą?

3. Wyjaśnić dlaczego w grafie dwudzielnym $G = G(V, W; E)$ z rysunku nie ma skojarzenia z V do W?



4 (Harem). Odwracamy kota ogonem i przypuśćmy, że chłopcy wybierają swoje ukochane i każdy chce poślubić więcej niż jedną. Sformułować warunek konieczny i dostateczny na to, aby problem haremu miał rozwiązanie. (Wskazówka: sklonować odpowiednią liczbę razy każdego chłopca i skorzystać z twierdzenia Halla.)

5. * Udowodnić, że jeśli $G = G(V, W; E)$ jest grafem dwudzielnym, w którym stopień każdego wierzchołka ze zbioru V jest nie mniejszy od stopnia dowolnego wierzchołka ze zbioru W, to w G istnieje skojarzenie z V do W.

6. *

a) Udowodnić, że jeśli każda dziewczyna zna r chłopców i każdy chłopiec zna r dziewczyn, to istnieje skojarzenie.
b) Udowodnić, że w grafie dwudzielnym regularnym stopnia r istnieje skojarzenie. Wywnioskować, że indeks chromatyczny takiego grafu wynosi r.

7. * Dany jest problem małżeństw z m dziewczynami, ale wiadomo, że każda dziewczyna zna co najmniej t chłopców. Udowodnić (wsk. indukcją po m), że istnieje przynajmniej $t!/(t-m)!$ skojarzeń, gdy $m < t$ oraz $t!$ skojarzeń, gdy $m \geqslant t$.

8. Czy rodzina $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4, 5\}\}$ ma transwersalę? Odpowiedź uzasadnić.

9. Ile różnych transwersal ma rodzina $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2010, 1\}\}$?

10. Przeprowadzić indukcyjny dowód Halmosa i Vaughana twierdzenia Halla w wersji transwersalowej.

11. Podać przykład prostokąta łacińskiego wymiaru 5×8 i kwadratu łacińskiego wymiaru 6×6.

12. Znaleźć dwa sposoby rozszerzenia prostokąta łacińskiego $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ do kwadratu łacińskiego wymiaru 5×5.

13. *

a) Dowieść, że jeśli $m < n$, to prostokąt łaciński wymiaru $m \times n$ można powiększyć do prostokąta łacińskiego wymiaru $(m+1) \times n$ na co najmniej $(n-m)!$ sposobów.
b) Wywnioskować, że istnieje co najmniej $n!(n-1)! \cdot \ldots \cdot 1!$ kwadratów łacińskich $n \times n$.

14. * Talię 52 kart dzielimy na 13 równych kupek. Udowodnić, że zawsze można wybrać po jednej karcie z każdej kupki, aby wśród wybranych 13 kart były wszystkie figury (jest ich 13: As, Król, ...).

Dodatek A. Rozwiązania zadań z $*$

5. Załóżmy, że warunek skojarzenia nie jest spełniony, tzn. istnieje $k > l$ i wierzchołki $v_i \in V$, $w_j \in W$ takie, że

$$\{w_1, \ldots, w_l\} = Z(\{v_1, \ldots, v_k\}).$$

Oczywiście stąd, krawędzie wychodzące z wierzchołków są zawarte w zbiorze krawędzi wychodzących z wierzchołków $w_1, \ldots, w_l$. Zatem

$$\sum_{i=1}^{l} \deg w_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} \deg v_i.$$

Ale $\deg v_i \geqslant \deg w_i$, dla $i = 1, \ldots, l$, więc

$$\sum_{i=1}^{k} \deg v_i = \sum_{i=1}^{l} \deg v_i + \sum_{i=l+1}^{k} \deg v_i \geqslant \sum_{i=1}^{l} \deg w_i + \sum_{i=l+1}^{k} \deg v_i > \sum_{i=1}^{l} \deg w_i,$$

co daje sprzeczność.□

6. a) od razu z 5. b) To, że nie da się pokolorować $r-1$ kolorami jest jasne, bo istnieje wierzchołek stopnia r. To, że da się pokolorować r kolorami robimy indukcją po r. Dla $r = 1$ wszystko jasne. Niech $r > 1$. Weźmy skojarzenie, które istnieje z a). Pomalujmy jego krawędzie pierwszym kolorem i wywalmy te krawędzie z grafu (zostawiając wierzchołki). Dostaniemy graf dwudzielny $r-1$-regularny i jazda z indukcją.□

7. Dla $m = 1$ jest wszystko jasne. Niech $m > 1$. Rozważmy przypadki

1° $m < t$; wtedy wybieramy dowolne $m - 1$ dziewczyn i z każdego z $t!/(t - (m - 1))!$ skojarzeń tych $m - 1$ dziewczyn (założenie indukcyjne) robimy co najmniej $t-(m-1)$ skojarzeń wszystkich dziewczyn wydając za mąż nie wybraną dziewczynę za kolejny chłopców, których ona zna i którzy nie są jeszcze ożenieni (jest ich przynajmniej $t - (m - 1)$).

2° $m = t$; stosując założenie indukcyjne do dowolnie wybranych $m - 1$ dziewczyn dostaniemy $t!/(t - m + 1)! = t!/1! = t!$ skojarzeń i każde z nich w oczywisty sposób się uzupełnia do skojarzenia wszystkich m dziewczyn.

3° $m > t$; wtedy naśladujemy indukcję z dowodu Holmosa i Vaughana.

□

13. Bezpośrednie zastosowanie zadania 7.

14. Rozważmy transwersalę $\mathscr{F} = \{S_1, \ldots, S_{13}\}$, gdzie S_i to zbiór wszystkich numerów kupek w których jest i-ta figura. Załóżmy, że dla podzbioru I zbioru $\{1, \ldots, 13\}$ nie zachodzi warunek skojarzenia, tzn.

$$|I| > \left|\bigcup_{i\in I} S_i\right|.$$

Ale wkładając $4|I|$ kart do $|\bigcup_{i\in I} S_i|$ szuflad = kupek w któreś muszą się znaleźć więcej jak 4 karty. Jest to sprzeczne z tym, że kupki na które podzieliliśmy karty są 4 elementowe. Twierdzenie Halla kończy rozwiązanie.

Literatura

[Wil] R. J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, Warszawa 2004
[Wik] Wikipedia, *Hall's theorem*