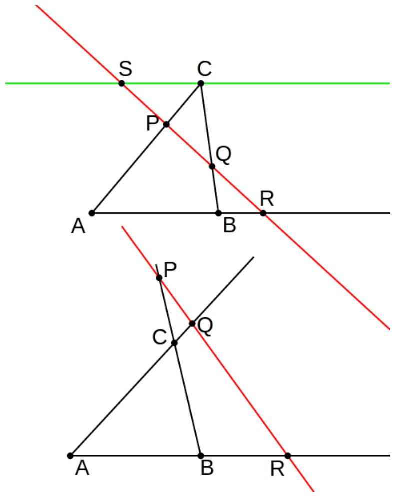
Wrześniowe kółko we Fryczu (grupa starsza) — Céva i Menelaos

9.IX.2009r.



Twierdzenie 1 (Menelaos). (1) *Dany jest trójkąt ABC i prosta PQR, gdzie P, Q, R leżą na prostych zawierających boki trójkąta (por. rysunki). Wtedy*

$$(*) \qquad \frac{AR}{RB}\frac{BQ}{QC}\frac{CP}{PA} = 1$$

(2) *Jeśli P, Q, R leżą na prostych zawierających boki trójkąta ABC jak na jednym z poniższych rysunków oraz zachodzi $(*)$, to te punkty są współliniowe.*

Dowód. Ustalmy uwagę na przypadku z pierwszego rysunku (drugi przypadek jest analogiczny).

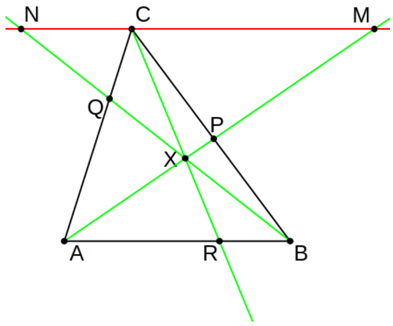
(1) Z twierdzenia Talesa mamy $\frac{BQ}{BR} = \frac{QC}{CS}$, $\frac{CS}{CP} = \frac{AR}{AP}$, skąd po wymnożeniu stronami teza.

(2) Niech prosta PQ przecina prostą AB w punkcie R'. Mamy z *(1)*

$$\frac{AR'}{R'B}\frac{BQ}{QC}\frac{CP}{PA} = 1,$$

co wraz z założeniem $(*)$ daje $\frac{AR'}{R'B} = \frac{AR}{RB}$, skąd ($R, R'$ leżą po tej samej stronie punktu B) $R = R'$.

□



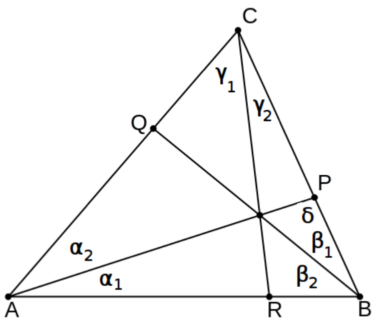
Twierdzenie 2 (Céva). *Jeśli P, Q, R leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, to AP, BQ, CR przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(**) \qquad \frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA} = 1$$

Dowód. Trik jest identyczny jak przy dowodzie twierdzenia Menelaosa.
"$\Longrightarrow$" Z twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA} = \frac{MC}{CN}\frac{BA}{MC}\frac{CN}{AB} = 1.$$

"$\Longleftarrow$" Niech AP, BQ przecinają się w punkcie X. Prowadzimy prostą CX — przecina ona AB w punkcie R'. Dalej jak u Menelaosa. □



Twierdzenie 3 (Céva, wersja trygonometryczna). *Jeśli P, Q, R leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, to AP, BQ, CR przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = 1$.*

Dowód. Mamy z twierdzenia sinusów $\frac{\sin\alpha_1}{BP} = \frac{\sin\delta}{AB}$, $\frac{\sin\alpha_2}{CP} = \frac{\sin\delta}{AC}$, skąd $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{BP}{CP}\frac{AC}{AB}$. Podobnie $\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{QC}{QA}\frac{AB}{BC}$, $\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{AR}{RB}\frac{BC}{CA}$. Zatem $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}$, czyli twierdzenie Cévy 2 kończy dowód. □

Kilka zadań

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Prosta k przecina odcinki AB i BC odpowiednio w punktach Y, Z oraz proste DA i CD odpowiednio w punktach X, T. Wykazać, że

$$\frac{DX}{XA}\frac{AY}{YB}\frac{BZ}{ZC}\frac{CT}{TD} = 1.$$

2. Punkty X i Y należą odpowiednio do boków BC i DA czworokąta $ABCD$, przy czym $\frac{AY}{YD} = \frac{CX}{XB}$. Prosta XY przecina odcinki BD i AC odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że $\frac{AL}{LC} = \frac{DK}{KB}$.

3. Dany jest czworościan $ABCD$. Sfera s jest styczna do krawędzi AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Wykazać, że punkty K, L, M, N leżą na okręgu.

4. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC, punkt M należy do tego odcinka. Proste BM i CM przecinają odcinki AC i AB odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że półprosta DA jest dwusieczną kąta EDF.

5 (LXOMIIst). Rozłączne okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio I_1 i I_2 są styczne do prostej k odpowiednio w punktach A_1 i A_2 oraz leżą po tej samej jej stronie. Punkt C leży na odcinku I_1I_2 , przy czym $\angle A_1CA_2 = 90°$. Dla $i = 1, 2$ niech B_i będzie punktem różnym od A_i, w którym prosta A_iC przecina okrąg o_i. Dowieść, że prosta B_1B_2 jest styczna do okręgów o_1 i o_2 .