Kółeczko z zadankami 8.II.2010

1. Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.

2. Liczby dodatnie x, y, z spełniają $x + y + z = \sqrt{xyz}$. Udowodnić, że $xy + yz + zx \geqslant 9\sqrt{xyz}$.

3. Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ przy czym $\angle APB = \angle ADP + \angle BCP$. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach APD i BCP są styczne.

4. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga: Proste prostopadłe w przestrzeni nie muszą się przecinać.

5. Wielomian $x^n + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_0$ ma współczynniki rzeczywiste $a_{n-3}, \ldots, a_0$ nie wszystkie równe 0. Udowodnić, że ma on mniej jak n pierwiastków rzeczywistych.

Kółeczko z zadankami 8.II.2010

1. Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.

2. Liczby dodatnie x, y, z spełniają $x + y + z = \sqrt{xyz}$. Udowodnić, że $xy + yz + zx \geqslant 9\sqrt{xyz}$.

3. Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ przy czym $\angle APB = \angle ADP + \angle BCP$. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach APD i BCP są styczne.

4. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga: Proste prostopadłe w przestrzeni nie muszą się przecinać.

5. Wielomian $x^n + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_0$ ma współczynniki rzeczywiste $a_{n-3}, \ldots, a_0$ nie wszystkie równe 0. Udowodnić, że ma on mniej jak n pierwiastków rzeczywistych.

Kółeczko z zadankami 8.II.2010

1. Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.

2. Liczby dodatnie x, y, z spełniają $x + y + z = \sqrt{xyz}$. Udowodnić, że $xy + yz + zx \geqslant 9\sqrt{xyz}$.

3. Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ przy czym $\angle APB = \angle ADP + \angle BCP$. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach APD i BCP są styczne.

4. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga: Proste prostopadłe w przestrzeni nie muszą się przecinać.

5. Wielomian $x^n + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_0$ ma współczynniki rzeczywiste $a_{n-3}, \ldots, a_0$ nie wszystkie równe 0. Udowodnić, że ma on mniej jak n pierwiastków rzeczywistych.

Kółeczko z zadankami 8.II.2010

1. Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.

2. Liczby dodatnie x, y, z spełniają $x + y + z = \sqrt{xyz}$. Udowodnić, że $xy + yz + zx \geqslant 9\sqrt{xyz}$.

3. Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ przy czym $\angle APB = \angle ADP + \angle BCP$. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach APD i BCP są styczne.

4. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga: Proste prostopadłe w przestrzeni nie muszą się przecinać.

5. Wielomian $x^n + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_0$ ma współczynniki rzeczywiste $a_{n-3}, \ldots, a_0$ nie wszystkie równe 0. Udowodnić, że ma on mniej jak n pierwiastków rzeczywistych.