ENTROPIA TOPOLOGICZNA PRZEKSZTAŁCENIA A JEGO STOPIEń — TWIERDZENIE MISIUREWICZA-PRZYTYCKIEGO

TOMASZ TKOCZ

Streszczenie. Tekst zawiera notatki do referatu z seminarium monograficznego *Układy dynamiczne*. Jest to w zasadzie tłumaczenie odpowiedniego rozdziału książki [KaHa] dotyczącego twierdzenia Misiurewicza-Przytyckiego. Podaje ono oszacowanie od dołu topologicznej entropii gładkiego przekształcenia za pomocą logarytmu jego stopnia. Przypomnimy potrzebne nam definicje entropii topologicznej, stopnia przekształcenia i pokażemy dowód twierdzenia wraz z kilkoma przykładami.

1. Entropia topologiczna

Rozważmy topologiczny układ dynamiczny, czyli przekształcenie ciągłe $f\colon X \longrightarrow X$ zwartej przestrzeni metrycznej (X,d). Wprowadzamy metryki

$$d_1^f := d, \qquad d_n^f(x,y) := \max_{0\leqslant k\leqslant n-1} d(f^k(x), f^k(y)), \quad n > 1.$$

d_n^f mierzy po prostu odległość miedzy odcinkami długości n orbit przekształcenia f startujących odpowiednio z punktów x i y. Żeby lepiej poczuć co to za metyka można jeszcze spróbować sobie wyobrazić czym jest kula o środku w punkcie x i promieniu ϵ — są to te punkty $y \in X$, że $d(f^k(x), f^k(y)) < \epsilon$, dla każdego $k = 0, 1, \ldots, n-1$, czyli te punkty, że orbita $\{y, \ldots, f^{n-1}(y)\}$ jest (w każdym kroku) ϵ blisko orbity $\{x, \ldots, f^{n-1}(x)\}$. Niech $N_d(f,\epsilon,n)$ oznacza moc maksymalnego zbioru ϵ rodzielonego w metryce d_n^f (poglądowo, jest to maksymalna liczba odcinków długości n orbit o wzajemnej odległości równej co najmniej ϵ). Ponieważ X jest zwarta w metryce d, f jest ciągłe, to X jest też zwarta w metryce d_n^f, więc $N_d(f,\epsilon,n) < \infty$. Określamy

$$h_d(f,\epsilon) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f,\epsilon,n).$$

Widać, że wielkość ta mierzy wykładniczy wzrost liczby ϵ rozdzielonych odcinków długości n orbit wraz z n. Zauważmy, że $h_d(f,\epsilon)$ nierośnie wraz z ϵ, więc ma sens

$$h_d(f) := \lim_{\epsilon\to 0+} h_d(f,\epsilon).$$

Łatwo zauważyć, że jeśli metryka d' jest równoważna metryce d, to $h_d(f) = h'_d(f)$. Rzeczywiście, z istnienia stałej C takiej, że $d \leqslant Cd'$ wynika, że $d_f^n \leqslant C{d'}_n^f$, a stąd mamy $N_d(f,\epsilon,n) \leqslant N_{d'}(f,\epsilon/C,n)$, czyli $h_d(f,\epsilon) \leqslant h_{d'}(f,\epsilon/C)$

i po przejściu do granicy $h_d(f) \leqslant h_{d'}(f)$. Przeciwną nierówność uzyskujemy analogiczne.

Dzięki powyższej obserwacji ma sens

Definicja 1. **Entropią topologiczną** przekształcenia $f\colon X \longrightarrow X$ przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy

$$h_{top}(f) := h_d(f).$$

Spójrzmy na

Przykład 1. Jeśli f jest izometrią, to $h_{top}(f) = 0$.

Przykład 2. Obliczymy entropię topologiczną przekształcenia $z \overset{f}{\longmapsto} z^2$ na S^1. Niech $d(z,w) :=$ (miara łukowa kąta miedzy wektorami z i w)$/2\pi$. Ustalmy $\epsilon = \frac{1}{2^k}$ i spróbujmy obliczyć $N_d(f,\epsilon,n$. Popatrzmy, że jeśli $d(z,w) \leqslant \frac{1}{2^{n-1+k}}$, to $d_n^f(z,w) \leqslant \frac{1}{2^k}$, czyli wtedy z,w nie są ϵ-rozdzielone. Zatem $N_d(f,\epsilon,n) \leqslant 2^{n-1+k}$ i łatwo widzieć, że można osiągnąć równość biorąc właśnie 2^{n-1+k} równo rozłożonych punktów na naszym okręgu. Stąd $h_d(f,\epsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln 2^{n-1+k} = \ln 2$, więc $h_{top}(f) = \ln 2$.

Zadanie 1. *Udowodnić, że $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, które jest L-Lipschitzowskie ma entropię topologiczną ograniczoną z góry przez $\ln L$.*

2. Stopień przekształcenia

Rozważamy teraz C^1 gładkie przekształcenie $f\colon M \longrightarrow N$ zwartych rozmaitości M, N. Przypomnijmy, że $x \in M$ nazywamy **punktem regularnym** (dla f), gdy Df_x jest odwracalne, $y \in N$ nazywamy **wartością regularną**, gdy każdy punkt z $f^{-1}(\{y\})$ jest punktem regularnym. Ze zwartości M wynika, że jeśli y jest wartością regularną, to zbiór $f^{-1}(\{y\})$ jest skończony. Stąd można zobaczyć, że zbiór wartości regularnych jest otwarty. Twierdzenie Sarda głosi, że zbiór wartości regularnych jest pełnej miary w obrazie przekształcenia. Zatem jest gęsty.

Dla wartości regularnej $y \in N$ określamy

$$\deg_y f := \sum_{x\in f^{-1}(y)} \epsilon_x,$$

gdzie $\epsilon_x := \pm 1$ w zależności od tego, czy Df_x zachowuje orientację, czy nie.

Dla ustalonej formy objętości ω na N określamy

$$\deg_\omega f := \int_M f^*\omega.$$

Okazuje się, że $\deg_y f = \deg_\omega f$. Istotnie, ustalmy takie otoczenie V punktu y, że $f|U_i\colon U_i \longrightarrow V$ są C^1 dyfeomorfizmami, gdzie U_i jest odpowiednim otoczeniem i-tego przeciwobrazu wartości y. Weźmy n-formę nu na N o nośniku zawartym w V taką, że $\int_N \nu = 1$. Ponieważ $\int_N(\omega - \nu) = 0$, to istnieje taka $n-1$ forma α na N, że $\omega - \nu = \mathrm{d}\alpha$. Mamy zatem

$$\deg_\omega f = \int_M f^*\omega = \int_M f^*(\nu + \mathrm{d}\alpha) = \int_M f^*\nu + \underbrace{\int_M \mathrm{d}(f^*\alpha)}_{0 \text{ z tw. Stokesa}}$$

$$= \sum \int_{U_i} (f|U_i)^*\nu = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \epsilon_x = \deg_y f.$$

Jako wniosek mamy, że $\deg_y f$ nie zależy od wyboru wartości regularnej y oraz $deg_\omega f$ nie zależy od wyboru formy ω i jest liczbą całkowitą. Dzięki temu ma sens

Definicja 2. **Stopniem przekształcenia** f nazywamy liczbę

$$\deg f := \deg_y f = \deg_\omega f.$$

Przykład 3. Przekształcenie $z \longmapsto z^n$ sfery $S^2 \simeq \overline{\mathbb{C}}$ ma stopień n co widać z definicji przez punkty regularne.

3. Twierdzenie Misiurewicza-Przytyckiego

Twierdzenie 1 (Misiurewicz-Przytycki). *Niech $f\colon M \longrightarrow M$ będzie C^1 gładkim przekształceniem zwartej, bez brzegu, orientowalnej gładkiej rozmaitości M. Wówczas $h_{top}(f) \geqslant \ln|\deg f|$.*

Dowód. Ustalmy n i ϵ i określmy

$$B := \{x \in M \mid |Jf_x| \geqslant \epsilon\}.$$

Jest to zbiór zwarty, który pokrywamy zbiorami otwartymi po obcięciu do których f jest dyfeomorfizmem. Niech δ będzie liczbą Lebesgue'a tego pokrycia. Zauważmy, że mamy

$$(*) \qquad \forall x, y \in B\ d(x,y) \leqslant \delta \implies f(x) \neq f(y).$$

Oznaczmy $L := \sup_M |Jf|$ i ustalmy liczbę $\alpha < 1$ (parametr z dowolności którego wyniknie teza, bo pokażemy, że $h_{top}(f) \geqslant \alpha \ln|\deg f|$). Zdefiniujmy zbiór

$$Z := \{x \in M | \#(B \cap \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}) \leqslant \alpha n\}.$$

Zauważmy, że dla $z \in Z$

$$|Jf^n_z| = \Pi_{j=0}^{n-1} |Jf_{f^j(z)}| \leqslant \epsilon^{n-\alpha n} L^{\alpha n} = (\epsilon^{1-\alpha} L^\alpha)^n < 1,$$

gdy $\epsilon < L^{-\alpha/(1-\alpha)}$ i w ten sposób dopieramy ϵ do ustalonej α. Mamy stąd $\operatorname{vol} f^n(Z) < \operatorname{vol} M$, więc istnieje punkt $x \in M \setminus f^n(Z)$ (korzystamy z twierdzenia Sarda), który jest wartością regularną przekształcenia f^n (więc też przekształceń $f, \dots, f^{n-1}$). Zachodzi dokładnie jedna z możliwości

- każdy przeciwobraz x należy do zbioru B; wtedy definiujemy zbiór $Q(x) := f^{-1}(\{x\})$ i mówimy o *dobrym przejściu* od x do przeciwobrazów
- istnieje $y \in f^{-1}(\{x\}) \setminus B$; wtedy przyjmujemy $Q(x) := y$ i przejście nazywamy *złym*

I tak w pierwszym kroku obserwowania przeciwobrazów punktu x dostajemy zbiór $Q_1 := Q(x)$. Dalej odgrzewamy dowcip i określamy

$$\begin{aligned} Q_2 &= \bigcup_{y\in Q_1} Q(y), \\ Q_3 &= \bigcup_{y\in Q_2} Q(y), \\ &\dots \\ Q_n &= \bigcup_{y\in Q_n} Q(y). \end{aligned}$$

Okazuje się, że Q_n jest szukanym dużym zbiorem n, δ rozdzielonym. Istotnie, jeśli $d_n^f(y, y') \leqslant \delta$ dla pewnych $y, y' \in Q_n$, to musi być $f^{n-1}(y) = f^{n-1}(y')$, bo w przeciwnym przypadku mamy, że $f^{n-1}(y), f^{n-1}(y')$ są dwoma *różnymi* punktami ze zbioru Q_1, więc na mocy jego konstrukcji muszą one należeć do B, a ponieważ są d-odległe o co najwyżej δ, to wobec $(*)$ mamy $x = f(f^{n-1}(y)) \neq f(f^{n-1}(y')) = x$ — sprzeczność. Cofając się w ten sposób dalej dochodzimy do wniosku, że $y = y'$. Zatem Q_n jest n, δ rozdzielony.

Jak duży jest zbiór Q_n? Skoro

$$Q_n \subset f^{-1}(\{x\}) \subset f^{-1}(M \setminus f^n(Z)) \subset M \setminus Z,$$

to $Q_n \cap Z = \emptyset$, więc dla ustalonego $y \in Q_n$ istnieje więcej jak αn wskaźników k takich, że $f^k(y) \in B$. Zatem musiało być co najmniej $\lfloor \alpha n \rfloor + 1$ dobrych przejść przy konstrukcji zbioru Q_n, a ponieważ każde dobre przejście, to co najmniej $s := |\deg f|$ nowych przeciwobrazów, to mamy $\#Q_n \geqslant s^{\lfloor \alpha n \rfloor + 1}$. Stąd

$$h_{top}(f) \geqslant \frac{1}{n} \ln N_d(f, \delta, n) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\lfloor \alpha n \rfloor + 1}{n} \ln s = \alpha \ln s.$$

□

Zauważmy, że przykład 2 pokazuje, że w podanym oszacowaniu może zachodzić równość, więc w pewnym sensie jest ono optymalne. Poniższy przykład z kolei pokazuje istotę założenia C^1 gładkości przekształcenia.

Przykład 4. Niech $f\colon S^2 \longrightarrow S^2$ będzie określone wzorem $f(z) = \frac{z^2}{2|z|}, z \neq 0$, $f(0) = 0$. Nie jest ono klasy C^1, bo f' nie jest ciągła w otoczeniu zarówno 0 jak i ∞. Z definicji wartości regularnych dobrze widać, że $\deg f = 2$ (tu jest drobne oszustwo, bo stopień definiowaliśmy dla przekształceń gładkich, ale można pokazać, że jest on niezmiennikiem homotopii i w ten sposób rozszerza się pojęcie stopnia na przekształcenia ciągłe). Ale $h_{top}(f) = 0$ (można potraktować jako ciekawe zadanie).

Literatura

[KaHa] A. Katok and B. Hasselblat, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1996.

[MiPrz] M. Misiurewicz and F. Przytycki, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys. 25 (1977), 573–574.