9.12.2011

Zespolona S – nierówność

(referat, krótki, na wręczeniu nagród konkursu na najlepszą pracę studencką z rachunku prawd. i zastosowań matematyki)

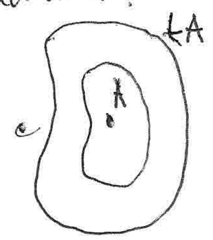
Wielkie PODZIĘKOWANIA dla prof. Rafała Latały, dzięki któremu mogłem przeżyć fajną matematyczną przygodę.
CIESZĘ się bardzo, że mogę powiedzieć ten referat.

1. Wstęp

Interesują nas dylatacje, czyli jednokładności o środku w zerze

$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto tx$, $t > 0$ – skala jednokładności.

$\mathbb{R}^n \supset A \longmapsto tA := \{tx \mid x \in A\}$



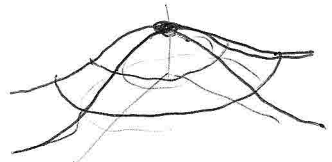
Co dzieje się z miarą przy takim rozciąganiu?

$$|tA| = t^n |A|$$

– wszystko jasne. Ale czy to takie łatwe dla miary Gaussa?

$$\gamma_n(tA) \neq t^n \gamma_n(A)$$

Przyp.
$d\gamma_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-|x|^2/2} dx$,
$|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.



Wzoru na $\gamma_n(tA)$ w zależności od t, $\gamma_n(A)$ raczej nie można się spodziewać, ale może da się coś powiedzieć o funkcji:

$$t \longmapsto \gamma_n(tA) \ ?$$

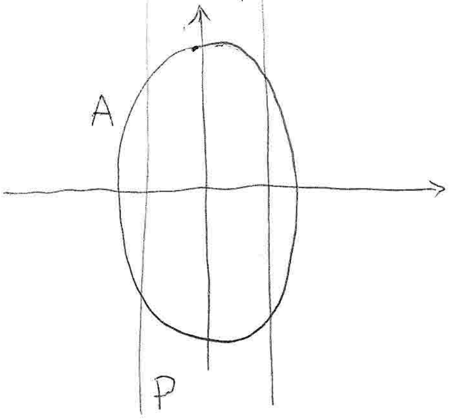
Np. co ją optymalnie szacuje z dołu, z góry?

Twierdzenie 1 (Łatwe) $A \subset \mathbb{R}^n$ – zbiór borelowski, $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\}$ – kula euklidesowa. Wtedy

$$\begin{matrix} \gamma_n(A) = \gamma_n(B) \\ |A \triangle B| > 0 \\ (A \text{ nie jest kulą}) \end{matrix} \implies \gamma_n(tA) < \gamma_n(tB), \quad t > 1.$$

~~Hipoteza~~
Twierdzenie 2 (Latała-Oleszkiewicz 1999) $A \subset \mathbb{R}^n$ – zbiór wypukły, domknięty, symetryczny względem 0, $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| \leq p\}$ – pas. Wtedy

$$\gamma_n(A) = \gamma_n(P) \implies \gamma_n(tA) \geq \gamma_n(tP), \quad t > 1.$$



1) Zbiory zwarte, wypukłe, 0-symetryczne są przyjemne, bo to kule domknięte względem pewnej normy na $\mathbb{R}^n$

2) To tw. pojawia się w 1969 u Skeppa w nieopublikowanym manuskrypcie.

2. Wyniki

Można analogiczne pytania stawiać w świecie zespolonym.

$$\mathbb{C}^n \ni (z_1, \dots, z_n) \xmapsto{\tau} (\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Im}\, z_1, \dots, \mathrm{Re}\, z_n, \mathrm{Im}\, z_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$\nu_n \leftsquigarrow \gamma_{2n}$$

$$\nu_n(A) := \gamma_{2n}(\tau(A)).$$

$$d\nu_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{2n}} e^{-|z|^2/2}\, dz$$

$$|z|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$$

$$dz = d(\mathrm{Re}\, z_1)\, d(\mathrm{Im}\, z_1) \dots d(\mathrm{Re}\, z_n)\, d(\mathrm{Im}\, z_n).$$

Hipoteza (Pełczyński) kule w zesp. normach $\left\{ \begin{array}{l} A \subset \mathbb{C}^n \text{ - wypukły, domknięty} \\ \text{- okrągły: } z \in A,\ \theta \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{i\theta} z \in A \end{array} \right.$

$P = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| \leq R \}$ - cylinder

$$\nu_n(A) = \nu_n(P) \implies \nu_n(tA) \geq \nu_n(tP),\ t \geq 1.$$

Twierdzenie 3 Istnieje stała uniwersalna $c \approx 0{,}64$, że dla wszystkich A, P j.w.

$$\nu_n(A) = \nu_n(P) \leq c \implies \nu_n(tA) \geq \nu_n(tP),$$
$$t \in [1, t_0], \quad \nu_n(t_0 A) = c.$$

Twierdzenie 4 A, P - j.w.

$$\nu_n(A) = \nu_n(P) \implies \nu_n\big((1 + 3(t-1))A\big) \geq \nu_n(tP),$$
$$t \geq 1.$$

3. Dowód twierdzenia 1

Jesteśmy w sali Steinhaussa, a on mawiał (podobno), że na każdym referacie matematycznym musi być dowód, więc do roboty.

Notacja: $f_A(t) := \gamma_n(tA)$. Zaczniemy od prostej uwagi

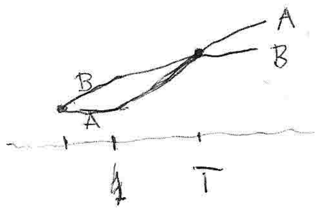
$$\triangle\!\!\!\!\!\;! \qquad \begin{matrix} f_A(1) = f_B(1) \\ |A \triangle B| > 0 \end{matrix} \implies f'_A(1) < f'_B(1).$$

Dowód
$$f'_A(1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \int_{tA} e^{-|x|^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}^n} \underset{x=ty}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \int_A e^{-t^2|y|^2/2} t^n \frac{dy}{\sqrt{2\pi}^n}$$
$$= n \int_A t^{n-1} e^{-t^2|y|^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}^n} - \int_A t^{n+1} |y|^2 e^{-t^2|y|^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}^n} \Big|_{t=1}$$
$$= n\gamma_n(A) - \int_A |y|^2 \, d\gamma_n(y),$$

więc
$$f'_B(1) - f'_A(1) = \int_A |y|^2 \, d\gamma_n(y) - \int_B |y|^2 \, d\gamma_n(y)$$
$$= \int_{A \setminus B} |y|^2 \, d\gamma_n(y) - \int_{B \setminus A} |y|^2 \, d\gamma_n(y)$$
$$> \int_{A \setminus B} r^2 \, d\gamma_n(y) - \int_{B \setminus A} r^2 \, d\gamma_n(y)$$
$$= r^2 \big(\gamma_n(A) - \gamma_n(B)\big) = 0.$$

Teraz dowodzimy, że
$$f_A(t) < f_B(t), \qquad t > 1.$$

Przypuśćmy przeciwnie; wtedy
$$T := \inf\{t > 1 \mid f_A(t) \geq f_B(t)\} < \infty$$



$$f_A(T) = f_B(T) = f_{TB}(1)$$
$$\| $$
$$\cancel{f_{TA}}\,\gamma_n(TA)$$
$$\| $$
$$f_{TA}(1) \qquad \Downarrow \ \triangle\!\!\!\!\!\;!$$
$$T f'_B(T) = f'_{TB}(1) > f'_{TA}(1) = T f'_A(T)$$

więc
$$f'_B(T) > f'_A(T),$$

ale $\exists\, t_n \searrow T$ $\quad f_A(t_n) \geq f_B(t_n)$
$$\Downarrow$$
$$f'_A(T) \longleftarrow \frac{f_A(t_n) - f_A(T)}{t_n - T} \geq \frac{f_B(t_n) - f_B(T)}{t_n - T} \longrightarrow f'_B(T)$$

$\lightning$. $\square$