I Momenty sum niezależnych zm. l. (wg. R. Latała, „Est... ”)

wstęp

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą nzal. zm. losowymi. Interesować nas dzisiaj będą oszacowania
$$\|\sum X_i\|_p,$$
w przypadku
1. $X_i \geq 0$
2. X_i - symetryczne.

Udowodnimy, że np. w przypadku nieujemnych zmiennych
$$\|X_1 + \ldots + X_n\|_p \underset{f\sim g \Leftrightarrow c^{-1}g \le f \le cg}{\tilde{t}} |||(X_i)_{i=1}^n|||_p := \inf\left\{t>0 \mid \mathbb{E}\prod\left|1+\frac{X_i}{t}\right|^p \le e^p\right\}$$
(dla zmiennych symetrycznych będzie podobny przepis à la Orlicz) Potem będzie najważniejsze - zastosowania i przykłady.

ZMIENNE ≥ 0

Ozn. $\varphi_p(x) = |1+x|^p \geq 1$, $\Phi_p(X) = \mathbb{E}\varphi_p(X) \geq 1$,
$$|||(X_i)_{i=1}^n|||_p := \inf\left\{t>0 \mid \underbrace{\prod_{i=1}^n \Phi_p\left(\frac{X_i}{t}\right)}_{\text{mal po } t} \le e^p\right\}$$

Tw 1. Niech $X_1, \ldots, X_n$ - ciąg niezależnych, nieujemnych zmiennych losowych. Wtedy
$$\frac{e-1}{2e^2}|||(X_i)|||_p \le \|X_1+\ldots+X_n\|_p \le e|||(X_i)|||_p, \quad p\geq 1,$$
$$\frac{(e^p-1)^{1/p}}{2e^2}|||(X_i)|||_p \le \|X_1+\ldots+X_n\|_p \le e|||(X_i)|||_p, \quad 0<p<1$$

D-D. Wybieramy, bwo, t wybijające inf., tzn
$$\Phi_p\left(\frac{X_1}{t}\right)\cdot\ldots\cdot\Phi_p\left(\frac{X_n}{t}\right) = e^p \qquad (t = |||(X_i)|||_p)$$
i chcemy t porównywać z $\|X_1+\ldots+X_n\|_p$.

Krok I Oszacowanie t z dołu

LM 1. $\Phi_p(X_1+\ldots+X_n) \le \Phi_p(X_1)\cdot\ldots\cdot\Phi_p(X_n)$, (X_i) - nzal. ≥ 0 zm. l.

D-D. ☺☺ wobec indukcji wystarczy $n=2$, tzn
$$\mathbb{E}|1+X_1+X_2|^p \le \mathbb{E}|1+X_1|^p|1+X_2|^p \quad \leftarrow \text{OK punktowo!} \ \square$$

Z lm 1. i $\varphi_p(x) = |1+x|^p \geq x^p$, $p>0$,
$$e^p \geq \Phi_p\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{t}\right) \geq \|(X_1+\ldots+X_n)/t\|_p^p,$$
skąd
$$et \geq \|X_1+\ldots+X_n\|_p.$$

Krok II Oszacowanie t z dołu.

LM 2 X, Y - niezal., ≥ 0 $\Rightarrow$ $\Phi_p(2X + \Phi_p(X)^{2/p} Y) \geq \Phi_p(X)\Phi_p(Y)$, $p>0$.

D-D. Idea - różne są powody zajścia tej $\geq$ gdy Y duży i gdy Y mały.

1° Y - duży $Y \geq 1$

$$\mathbb{E}\,\Phi_p(2X + \Phi_p(X)^{2/p} Y)\mathbb{1}_{\{Y\geq 1\}} \underset{\text{brute}}{\geq} \mathbb{E}\,\Phi_p(\overbrace{\Phi_p(X)^{2/p}}^{\geq 1} Y)\mathbb{1}_{\{Y\geq 1\}}$$

$$= \cancel{\mathbb{E}\,|1+\Phi_p(X)^{p/2} Y|^p \mathbb{1}_{\{Y\geq 1\}}}$$

ale $\varphi_p(tx) = |\underbrace{1+tx}|^p \geq t^{p/2}|1+x|^p$, $t, x \geq 1$

$1 + tx = \sqrt{t}(1+x) + tx - \sqrt{t}x - \sqrt{t} + 1 = \sqrt{t}(1+x) + (\sqrt{t}x - 1)(\sqrt{t}-1) \geq \sqrt{t}(1+x)$

czyli

$$\geq \mathbb{E}\,\Phi_p(X)\,\varphi_p(Y)\mathbb{1}_{\{Y\geq 1\}} = \Phi_p(X)\,\mathbb{E}\,\varphi_p(Y)\mathbb{1}_{\{Y\geq 1\}}.$$

2° Y - mały, $Y \leq 1$

$$\mathbb{E}\,\varphi_p(\underset{1+Y}{\underset{\vee}{2}}X + \underset{1}{\underset{\vee}{\Phi_p(X)^{2/p}}} Y)\mathbb{1}_{\{Y<1\}} \geq \mathbb{E}\,\varphi_p((1+Y)X + Y)\mathbb{1}_{\{Y<1\}}$$

$$= \mathbb{E}\,\varphi_p(X)\varphi_p(Y)\mathbb{1}_{\{Y<1\}}$$

$$= \Phi_p(X)\,\mathbb{E}\,\varphi_p(Y)\mathbb{1}_{\{Y<1\}}.$$

LM 3. $X_1, X_2, \dots, X_n$ - niezal., ≥ 0 i $\Phi_p(X_1)\cdot\ldots\cdot\Phi_p(X_n) \leq e^p$, to

$$\Phi_p(2e^2(X_1+\ldots+X_n)) \geq \Phi_p(X_1)\cdot\ldots\cdot\Phi_p(X_n)$$

D-D. $Y_k := 2(\Phi_p(X_1)\cdot\ldots\cdot\Phi_p(X_k))^{2/p}(X_1+\ldots+X_k)$, $k\geq 1$

i wyst. ind. że, więcej

$\forall k\geq 1$ $\Phi_p(Y_k) \geq \Phi_p(X_1)\cdot\ldots\cdot\Phi_p(X_n)$

Robimy to ind. po k.

1° $k=1$ $\Phi_p(Y_1) = \Phi_p(2\underbrace{\Phi_p(X_1)^{2/p}}_{\geq 1} X_1) \geq \Phi_p(X_1)$

2° $k \rightsquigarrow k+1$ $\Phi_p(Y_{k+1}) = \Phi_p\Big(2\underbrace{(\Phi_p(X_1)\cdot\ldots\cdot\Phi_p(X_{k+1}))^{2/p}}_{\geq 1} X_{k+1} + \Phi_p(X_{k+1})^{2/p} Y_k\Big)$

$$\geq \Phi_p(2X_{k+1} + \Phi_p(X_{k+1})^{2/p} Y_k)$$

$$\underset{\text{lm 2}}{\geq} \Phi_p(X_{k+1})\,\Phi_p(Y_k). \quad \square$$

Szacujemy t. Z lm 3.

$$\Phi_p\left(2e^2\,\frac{X_1+\ldots+X_n}{t}\right) \geq e^p$$

Dla $Z \geq 0$ - zm. l. mamy

$$\Phi_p(Z) = \mathbb{E}\,|1+Z|^p \leq \begin{cases} (1+\|Z\|_p)^p & p \geq 1 \\ 1+\|Z\|_p^{\,p} & 0<p<1, \end{cases}$$

więc

$$1+\frac{2e^2}{t}\,\|X_1+\ldots+X_n\|_p \geq e \qquad , p \geq 1,$$

$$\frac{2e^2}{t}\,\|X_1+\ldots+X_n\|_p \geq (e^p-1)^{1/p}$$

skąd

$$\|X_1+\ldots+X_n\|_p \geq \frac{e-1}{2e^2}\,t \qquad p \geq 1,$$

$$\geq \frac{(e^p-1)^{1/p}}{2e^2}\,t \qquad 0<p<1.$$

Co gdy mamy ciąg i.i.d. ?

WN 1 $\quad p \geq 1$, $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ - iid, $\geq 0 \Rightarrow$

$$\|X_1+\ldots+X_n\|_p \sim \sup\left\{ \frac{p}{s}\left(\frac{n}{p}\right)^{1/s}\|X\|_s \;\middle|\; 1 \vee \frac{p}{n} \leq s \leq p \right\}.$$

D-D. Z tw. 1

$$\|X_1+\ldots+X_n\|_p \underset{\text{tw.1}}{\sim} \inf\left\{ t>0 \;\middle|\; \Phi\left(\frac{X}{t}\right) \leq e^{p/n} \right\}.$$

Pokażemy w 2 krokach, że ten inf jest równoważny temu sup.

<u>Krok I</u> Zał. że $\Phi_p\left(\frac{X}{t}\right) \leq e^{p/n}$ i $1 \leq s \leq p$. Mamy

$$\varphi_p(x) = \left(\left((1+x)^{p/s}\right)\right)^s \geq \left(1+\frac{p}{s}x\right)^s \geq 1+\left(\frac{p}{s}\right)^s x^s$$

więc

$$e^{p/n}-1 \geq \mathbb{E}\left(\varphi_p\left(\frac{X}{t}\right)-1\right) \geq \left(\frac{p}{s}\right)^s \left\|\frac{X}{t}\right\|_s^s$$

Jeśli
- $\frac{p}{n} \leq 1$, to $e^{p/n}-1 \leq e\,\frac{p}{n} \leq e^s\,\frac{p}{n} \Rightarrow e\,t \geq \frac{p}{s}\left(\frac{n}{p}\right)^{1/s}\|X\|_s$
- $\frac{p}{n} > 1$ i $\frac{p}{n} \leq s$, to $\left(e^{p/n}-1\right)^{1/s} \leq \left(e^s-1\right)^{1/s} \leq e \Rightarrow e\,t \geq \frac{p}{s}\|X\|_s$

$$\geq \frac{p}{s}\underbrace{\left(\frac{n}{p}\right)^{1/s}}_{1}\|X\|_s$$

i biorąc sup po s, inf po t mamy

$$e \inf\ldots \geq \sup\ldots$$

Krok II Załóżmy, że sup $= t$. Szacujemy φ_p z góry

$$\varphi_p(x) = (1+x)^p \underset{\uparrow}{\leq} 1 + \sum_{0<k<p} \binom{p}{k} x^k + x^p, \quad \forall x \geq 0$$

sprawdza się np pochodną

Ale
$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-1+k)}{k!} \underset{\boxed{k! \geq \left(\frac{k}{e}\right)^k}}{\leq} \frac{p^k}{(k/e)^k} = \left(\frac{ep}{k}\right)^k, \quad \text{więc}$$

$$\Phi_p\left(\frac{X}{2et}\right) \leq 1 + \sum_{0<k<p} \frac{p^k}{(2tk)^k} \|X\|_k^k + \frac{1}{(2et)^p}\|X\|_p^p$$

Jeśli

- $\frac{p}{n} \leq 1$, to z def t $\quad \|X\|_s^s \leq t^s \left(\frac{s}{p}\right)^s \left(\frac{p}{n}\right), \quad 1 \leq s \leq p$

$$\Phi_p\left(\frac{X}{2et}\right) \leq 1 + \sum_{0<k<p} \frac{p^k}{(2tk)^k} t^k \left(\frac{k}{p}\right)^k \frac{p}{n} + \frac{1}{(2et)^p} t^p \frac{p}{n}$$
$$= 1 + \frac{p}{n}\sum_{0<k<p}\frac{1}{2^k} + \frac{p}{n}\frac{1}{(2e)^p} \leq 1 + \frac{p}{n} \leq e^{p/n}$$

więc tutaj
$$2et \geq \inf \quad \Rightarrow \quad 2e \sup \geq \inf$$

- $\frac{p}{n} > 1$, to z def t $\quad \|X\|_s^s \leq t^s \left(\frac{s}{p}\right)^s \left(\frac{p}{n}\right) \quad \frac{p}{n} \leq s \leq p$

i szacujemy tak

$$\Phi_p\left(\frac{X}{2et}\right) \leq \sum_{k \leq p/n} \underbrace{\binom{p}{k}}_{\frac{p^k}{k!}} \underbrace{\left\|\frac{X}{2et}\right\|_k^k}_{\|\,\|_k \leq \|\,\|_{p/n}} + \sum_{\frac{p}{n}<k<p} \frac{p^k}{(2tk)^k}\|X\|_k^k + \frac{\|X\|_p^p}{(2et)^p}$$
$$\leq \exp\left(\left\|\frac{pX}{2et}\right\|_{p/n}\right) + \sum_{p/n<k<p}\frac{1}{2^k}\frac{p}{n} + \frac{p}{n}\frac{1}{(2e)^p}$$
$$\leq \exp\left(\underbrace{\frac{p}{2e}\,\frac{p/n}{p}\left(\frac{p}{n}\right)^{n/p}}_{\frac{1}{2e}\left(\frac{p}{n}\right)^{n/p}\frac{p}{n} \leq \frac{p}{2n}}\right) + \frac{p}{n} \leq \frac{p}{n} + e^{\frac{1}{2}\frac{p}{n}} \underset{\uparrow}{\leq} e^{\frac{p}{n}}$$

$x^{1/x} \leq e$

$x + e^{x/2} \leq e^x, \; x \geq 1$

Zatem mamy

$$2e \sup \geq \inf. \quad \square$$

ZMIENNE SYMETRYCZNE

Przyp oznaczeń

$$\Phi_p(X) = \mathbb{E}\varphi_p(X), \qquad \tilde{\varphi}_p(x) = \frac{|1+x|^p + |1-x|^p}{2} = \tilde{\varphi}_p(|x|)$$
$$= \mathbb{E}\varphi_p(\varepsilon X) = \mathbb{E}\varphi_p(\varepsilon|X|) = \mathbb{E}\tilde{\varphi}_p(|X|) = \mathbb{E}\tilde{\varphi}_p(X)$$

⚠ X - sym $\Leftrightarrow$ $\varepsilon|X| \sim X$

$$|||(X_i)|||_p = \inf\left\{t > 0 \;\middle|\; \prod_{i=1}^n \Phi_p(X_i/t) \leq e^p\right\}$$

Celem jest

TW 2. $X_1, \ldots, X_n$ - sym, niezal

$$\frac{e-1}{2e^2}|||(X_i)|||_p \leq \|X_1 + \ldots + X_n\|_p \leq e|||(X_i)|||_p, \quad p \geq 2.$$

Strategia d-du jest ta sama Bienemy t wybijającego równość w
$$\Phi_p\left(\frac{X_1}{t}\right)\cdots\Phi_p\left(\frac{X_1}{t}\right)=e^p$$
i trzeba umieć szacować z góry i z dołu ilorazy Φ_p.

LM 4. $X_1, X_2, \dots, X_n$ - niezal., sym., $p\geq 2$ $\Longrightarrow$
$$\Phi_p(X_1+\dots+X_n)\leq \Phi_p(X_1)\cdots\Phi_p(X_n).$$

D-D. Wyst. dla $n=2$. Wtedy
$$\Phi_p(X_1+X_2)=\mathbb{E}\tilde\varphi_p(X_1+X_2)=\mathbb{E}\tilde\varphi_p(\varepsilon_1|X_1|+\varepsilon_2|X_2|)$$
$$=\tfrac{1}{4}2\mathbb{E}\Big(\tilde\varphi_p(|X_1|+|X_2|)+\tilde\varphi_p(|X_1|-|X_2|)\Big)$$
$$\Phi_p(X_1)\Phi_p(X_2)=\mathbb{E}\tilde\varphi_p(\varepsilon_1|X_1|)\,\mathbb{E}\tilde\varphi_p(\varepsilon_2|X_2|)=\mathbb{E}\tilde\varphi_p(|X_1|)\tilde\varphi_p(|X_2|)$$
wystarczy więc punktowo pokazać że dla $0\leq x_2\leq x_1$
$$\tilde\varphi_p(x_1+x_2)+\tilde\varphi_p(x_1-x_2)\leq 2\tilde\varphi_p(x_1)\tilde\varphi_p(x_2).$$
$$\Updownarrow$$
$$\underbrace{|1+x_1+x_2|^p}_{d}+\underbrace{|1-x_1-x_2|^p}_{a}+\underbrace{|1+x_1-x_2|^p}_{c}+\underbrace{|1-x_1+x_2|^p}_{b}$$
$$\leq (|1+x_1|^p+|1-x_1|^p)(|1+x_2|^p+|1-x_2|^p)$$
$$=|x_1x_2+\underbrace{1+x_1+x_2}_{d}|^p+|x_1x_2+\underbrace{1-x_1-x_2}_{a}|^p$$
$$+|-x_1x_2+\underbrace{1+x_1-x_2}_{c}|^p+|-x_1x_2+\underbrace{1-x_1+x_2}_{b}|^p$$
Wprowadzamy
$$f(t)=|a+t|^p+|b-t|^p+|c-t|^p+|d+t|^p$$
i mamy teraz to
$$f(0)\leq f(x_1x_2)$$

LM 5. Jeśli $p\geq 2$, $a<b<c<d$ spełniają $\underline{a+d=b+c=2}$, to f - niemalejąca na $[0,\infty)$
$\Downarrow$ $c,d\geq 1$

D-D. f - wyp, więc wyst spr. że $f'(0)\geq 0$
$$\frac{1}{p}f'(0)=|a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b-|c|^{p-2}c+|d|^{p-2}d$$
$$=|2-d|^{p-2}(2-d)-|2-c|^{p-2}(2-c)-|c|^{p-2}c+|d|^{p-2}d$$
$$=g(d-1)-g(c-1),$$
gdzie
$$g(x)=|1+x|^{p-2}(1+x)+|1-x|^{p-2}(1-x)$$
i spr. że g niemal na $[0,\infty)$
$$g'(x)=(p-1)\big((1+x)^{p-2}-(x-1)^{p-2}\big)\geq 0 \qquad x\geq 1$$
$$=(p-1)\big((1+x)^{p-2}-(1-x)^{p-2}\big)\geq 0 \qquad x<1.\ \square$$

LM 6. $X_1, \ldots, X_n$ - nzal, sym t.że $\Phi_p(X_1) \cdot \ldots \cdot \Phi_p(X_n) \le e^p$, $p \geq 1$ $\Rightarrow$
$\Phi_p(2e^2(X_1 + \ldots + X_n)) \geq \Phi_p(X_1) \cdot \ldots \cdot \Phi_p(X_n)$.

D-D. W przypadku sym, żeby naśladować przypadek ≥ 0, potrzeba

OTT $a, b, c \in \mathbb{R}$, $|b| \le |c|$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\varphi_p(a + b\varepsilon) \le \mathbb{E}\varphi_p(a + c\varepsilon)$

D-D. $\mathbb{E}\varphi_p(a + b\varepsilon) = \mathbb{E}\varphi_p(a + |b|\varepsilon) \underset{\text{bso } c \neq 0}{=} \mathbb{E}\varphi_p\left(\frac{|b|}{|c|}(a + |c|\varepsilon) + \left(1 - \frac{|b|}{|c|}\right)a\right)$

$\underset{\text{wyp } \varphi_p}{\le} \frac{|b|}{|c|}\mathbb{E}\varphi_p(a + |c|\varepsilon) + \underbrace{\left(1 - \frac{|b|}{|c|}\right)\varphi_p(a)}_{} \underset{\text{Jensen}}{\le} \mathbb{E}\varphi_p(a + |c|\varepsilon)$ □

No to lecimy z indukcją

$Y_k = 2[\Phi_p(X_1) \cdot \ldots \cdot \Phi_p(X_k)]^{2/p}(X_1 + \ldots + X_k)$

i wyst

$\Phi_p(Y_k) \geq \Phi_p(X_1) \cdot \ldots \cdot \Phi_p(X_k)$

$\Updownarrow$ bo

$\mathbb{E}\varphi_p(\underbrace{2[\Phi_p(X_1) \cdot \ldots \cdot \Phi_p(X_k)]^{2/p}}_{\underset{2e^2}{\wedge}}(X_1 + \ldots + X_k) \cdot \varepsilon)$

$\wedge$ OTT

$\Phi_p(2e^2(X_1 + \ldots + X_k))$

To lecimy z indukcji po k.

$k = 1$: $\Phi_p(Y_1) = \mathbb{E}\varphi_p(\underbrace{2\Phi_p(X_1)^{2/p}}_{\underset{1}{\vee}} X_1\varepsilon) \underset{\text{OTT}}{\geq} \mathbb{E}\varphi_p(X_1\varepsilon) = \Phi_p(X_1)$

$k \rightsquigarrow k+1$: $\Phi_p(Y_{k+1}) = \underset{\mathbb{E}_{(X)}\mathbb{E}_\varepsilon}{\mathbb{E}\varphi_p}(\Phi_p(X_{k+1})^{2/p}Y_k + \underbrace{2[\Phi_p(X_1) \cdot \ldots \cdot \Phi_p(X_{k+1})]^{2/p}}_{\underset{1}{\vee}} X_{k+1} \ldots$ nzal od $X_1, \ldots$

$\underset{\text{OTT}}{\geq} \mathbb{E}_{(X)}\varphi_p(\Phi_p(X_{k+1})^{2/p}Y_k + 2X_{k+1})$

i teraz żeby skończyć jest potrzebny

LM 7 X, Y - sym, nzal $\Rightarrow$ $\Phi_p(\Phi_p(X)^{2/p}Y + 2X) \geq \Phi_p(X)\Phi_p(Y)$

D-D. 1. Y mały $|Y| \le 1$

$\mathbb{E}\varphi_p(X)\varphi_p(Y)\mathbb{1}_{\{|Y| \le 1\}} = \mathbb{E}\varphi_p(\varepsilon_1 X)\varphi_p(\varepsilon_2 Y)\mathbb{1}_{\{|Y| \le 1\}}$

$= \mathbb{E}\varphi_p(\varepsilon_1 X + \varepsilon_2 Y + \varepsilon_1\varepsilon_2 XY)\mathbb{1}_{\{|Y| \le 1\}} = \mathbb{E}\varphi_p(\varepsilon_2 Y + \varepsilon_1(\underbrace{X + \varepsilon_2 XY}_{|\cdot| \le 2|X|}))\mathbb{1}_{\{|Y| \ldots}$

$\underset{\text{OTT}}{\le} \mathbb{E}\varphi_p(\underbrace{\varepsilon_2 Y}_{|\cdot| \le \Phi_p(X)^{2/p}|Y|} + 2\varepsilon_1 X)\mathbb{1}_{\{|Y| \le 1\}} \underset{\text{OTT}}{\le} \mathbb{E}\varphi_p(\Phi_p(X)^{2/p}\varepsilon_2 Y + 2\varepsilon_1 X)\mathbb{1}_{\ldots}$

$= \mathbb{E}\varphi_p(\Phi_p(X)^{2/p}Y + 2X)\mathbb{1}_{\{|Y| \le 1\}}$

2. Y - duży

$$\mathbb{E}\varphi_p\left(\Phi_p(X)^{2/p} Y + 2\varepsilon X\right)\mathbb{1}_{\{|Y|\geq 1\}} \underset{\text{OTT}}{\geq} \mathbb{E}\varphi_p\left(\Phi_p(X)^{2/p} Y\right)\mathbb{1}_{\{|Y|\geq 1\}}$$

$$\| \quad \mathbb{E}\tilde{\varphi}_p\left(\Phi_p(X)^{2/p} |Y|\right)\mathbb{1}_{\{|Y|\geq 1\}}$$

i przydatny się lemat o wyciąganiu skalara z $\tilde{\varphi}_p$

LM 8. $t \geq 1, \ y \geq 1 \implies \tilde{\varphi}_p(ty) \geq t^{p/2}\tilde{\varphi}_p(y)$

D-D. Dla ustalonego y niech

$$f(t) = \ln \tilde{\varphi}_p(ty) - \tfrac{p}{2}\ln t, \quad t \geq 1$$

Do ud. $f(t) \geq f(1)$ co jest prawdą, bo f - niemal na $[1,\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{\tilde{\varphi}_p(ty)}\tilde{\varphi}_p'(ty)\cdot y - \frac{p}{2t}$$

$$= \frac{p}{2t}\frac{1}{(ty+1)^p + (ty-1)^p}\left(ty\cdot\left((ty+1)^{p-1} + (ty-1)^{p-1}\right) - (ty+1)^p - (ty-1)^p\right)$$

$$= \frac{p}{2t}\,\frac{(ty+1)^{p-1}(ty-1) + (ty-1)^{p-1}(ty+1)}{(ty+1)^p + (ty-1)^p} \geq 0. \ \square$$

Zatem

$$\mathbb{E}\varphi_p\left(\Phi_p(X)^{2/p} Y + 2X\right)\mathbb{1}_{\{|Y|\geq 1\}} \geq \Phi_p(X)\,\mathbb{E}\tilde{\varphi}_p(|Y|)\mathbb{1}_{\{|Y|\geq 1\}}$$

$$= \Phi_p(X)\,\mathbb{E}\varphi_p(Y)\mathbb{1}_{\{|Y|\geq 1\}}.$$

Dodajemy i teraz lm 7. $\square$

WN2. $p \geq 2$, $X, X_1, \ldots, X_n$ - iid sym $\implies$

$$\|X_1 + \ldots + X_n\|_p \sim \sup\left\{ \frac{p}{s}\left(\frac{n}{p}\right)^{1/s}\|X\|_s \ \middle|\ 2 \vee \frac{p}{n} \leq s \leq p \right\}.$$

⚠ Można tw. 2 dostać dla zmiennych niekoniecznie symetrycznych, ale o średniej 0. Bo

$X_1, \ldots, X_n$ - niezal o śr 0 $\implies$ $\frac{1}{2}\|\sum X_i\|_p \leq \|\sum \varepsilon_i X_i\|_p \leq 2\|\sum X_i\|_p$

$(\Phi_p(X_i) := \Phi_p(\varepsilon_i X_i))$.

PRZYKŁADY 1) Nierówność Rosenthala dla zmiennych ≥ 0.

Niech $X_1, \dots, X_n \geq 0$ - n.zal. Mamy trywialnie

$$\left(\sum x_i\right)^p \geq \sum x_i^p \quad , \quad \|\sum X_i\|_p \geq \|\sum X_i\|_1$$

tzn.

$$\|\sum X_i\|_p \geq \left(\sum \mathbb{E}X_i^p\right)^{1/p} \vee \sum \mathbb{E}X_i$$

To się ze stała da odwrócić!

LM. $X_i \geq 0$ i n.zal, $p \geq 1 \Rightarrow$

$$\forall c>0 \quad \tfrac{1}{2} |||(X_i)|||_p \leq \frac{(1+c)^p}{cp} \sum \mathbb{E}X_i \vee \left(1+\tfrac{1}{c}\right)\frac{1}{p^{1/p}}\left(\sum \mathbb{E}X_i^p\right)^{1/p}$$

TW. $\exists K < \infty$

$$\|\sum X_i\|_p \leq K \frac{p}{\ln p}\left(\sum \mathbb{E}X_i \vee \left(\sum \mathbb{E}X_i^p\right)^{1/p}\right) \quad , \quad p \geq 1$$

D-D. $c = \frac{\ln p}{p}$ $\quad \frac{(1+\ln p/p)^p}{\ln p} \leq \frac{(e^{\ln p^{1/p}})^p}{\ln p} = \frac{p}{\ln p}$,

$$\left(1+\frac{p}{\ln p}\right)\frac{1}{p^{1/p}} \leq \frac{2p}{\ln p}. \quad \square$$

D-D lm. Badamy kiedy $\prod \mathbb{E}\Phi_p\left(\frac{X_i}{t}\right) \leq e^p$, trzeba więc oszacować $\Phi_p\left(\frac{X_i}{t}\right) = \mathbb{E}\left(1+\frac{X_i}{t}\right)^p$.

1° $\quad (1+x)^p \quad c \leq x \qquad (1+x)^p \leq \left(\frac{x}{c}+x\right)^p = x^p\left(1+\frac{1}{c}\right)^p$

2° $\quad c > x \qquad \frac{(1+x)^{p}-1}{x} \leq \frac{(1+c)^{p}-1}{c} \qquad$ (monot. ilorazów różnicowych f-cji wyp. t^p)

$$\Updownarrow$$

$$(1+x)^p \leq 1 + \frac{x}{c}(1+c)^p$$

więc

$$(1+x)^p \leq 1 + \frac{(1+c)^p}{c}x + \left(1+\frac{1}{c}\right)^p x^p,$$

skąd

$$\ln \mathbb{E}\left(1+\frac{X_i}{t}\right)^p \underset{\ln(1+s)\leq s}{\leq} \frac{(1+c)^p}{tc}\mathbb{E}X_i + \frac{1}{t^p}\left(1+\frac{1}{c}\right)^p \mathbb{E}X_i^p$$

więc

$$\ln \prod \Phi_p\left(\frac{X_i}{t}\right) = \sum \ln \mathbb{E}\left(1+\frac{X_i}{t}\right)^p \leq 2\cdot\left(\frac{1}{t}\frac{(1+c)^p}{c}\sum \mathbb{E}X_i \vee \frac{1}{t^p}\left(1+\frac{1}{c}\right)^p \sum \mathbb{E}X_i^p\right)$$

Biorąc najmniejsze $t = t_0$, że $\ln \prod \Phi_p\left(\frac{X_i}{t}\right) = p$ czyli $t_0 = |||(X_i)|||$ mamy

$$p \leq 2\left(\frac{1}{t_0}\frac{(1+c)^p}{c}\sum \mathbb{E}X_i \vee \frac{1}{t_0^p}\left(1+\frac{1}{c}\right)^p \sum \mathbb{E}X_i^p\right)$$

skąd

$$t_0 \leq 2\left(\frac{(1+c)^p}{cp}\sum \mathbb{E}X_i \vee \left(1+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{p^{1/p}}\left(\sum \mathbb{E}X_i^p\right)^{1/p}\right). \quad \square$$

$S = \sum_1^n a_i\varepsilon_i$, $a_i \in \mathbb{R}$, bwo $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$.

$\|S\|_p \sim \sum_{i\leq p} a_i + \sqrt{p}\left(\sum_{i>p} a_i^2\right)^{1/2}$ – wzór Hitczenki

będzie poniżej d-d wg. pracy Kwapienia, Hitczenki zakomunikowany mi przez K. Oleszkiewicza

Ozn. $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}S^2} = \sqrt{\sum a_i^2}$

1. ≤ Chinczyna $\|S\|_p \leq C\sqrt{p}\,\sigma$

D-D. Chcemy przejść do momentów wykładniczych

$$x \leq e^{x-1} \equiv ex \leq e^x \equiv \frac{e}{p}x \leq e^{x/p} \equiv \left(\frac{e}{p}\right)^p x^p \leq e^x$$

$$\left(\frac{e}{\sqrt{p}}\right)^p \mathbb{E}|S|^p = \mathbb{E}\left(\frac{e}{p}\right)^p(\sqrt{p}|S|)^p \leq \mathbb{E}e^{\sqrt{p}|S|} \leq \mathbb{E}\left(e^{\sqrt{p}S}+e^{-\sqrt{p}S}\right)$$

$$= 2\mathbb{E}e^{\sqrt{p}S} = 2\prod_{i=1}^n \frac{e^{\sqrt{p}a_i}+e^{-\sqrt{p}a_i}}{2} \leq 2\prod e^{pa_i^2/2}$$

$$= 2e^{p\sigma^2/2}$$

Bwo $\sigma = 1$

$$\|S\|_p = \left(\mathbb{E}|S|^p\right)^{1/p} \leq \frac{\sqrt{p}}{e}2^{1/p}\sqrt{e} \leq C\sqrt{p}\ \square$$

2. Paley-Zygmund $\exists\, \varkappa > 0 \quad \mathbb{P}\left(S \geq \frac{\sigma}{2}\right) \geq \varkappa$

$$\mathbb{P}\left(|S| \geq \frac{\sigma}{2}\right) = \mathbb{P}\left(S^2 \geq \tfrac{1}{4}\sigma^2\right) \geq \left(1-\tfrac{1}{4}\right)^2 \frac{(\mathbb{E}S^2)^2}{\mathbb{E}S^4} = \frac{9}{16}\left(\frac{\sigma}{\|S\|_4}\right)^4 \underset{\text{Chinczyn}}{\geq} \frac{9}{16}\frac{1}{C\cdot 4}$$

$$\| \quad \mathbb{P}\left(S \geq \frac{\sigma}{2} \cup -S \geq \frac{\sigma}{2}\right) = 2\mathbb{P}\left(S \geq \frac{\sigma}{2}\right)$$

3. Monotoniczność $I \subset \{1,\ldots,n\}$ $\quad \left\|\sum_{i\in I} a_i\varepsilon_i\right\|_p \leq \|S\|_p$

$$\|S\|_p^p = \mathbb{E}|S|^p = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(|S|^p \mid \sigma(\varepsilon_i, i\in I)\right)\right)$$

$$\underset{\text{Jensen}}{\geq} \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(S \mid \sigma(\varepsilon_i, i\in I))\right|^p = \mathbb{E}\left|\sum_I a_i\varepsilon_i\right|^p.$$

Krok I $\|S\|_p$ – z góry $\quad S = \underbrace{\sum_{i\leq p} a_i\varepsilon_i}_{\underline{S}} + \underbrace{\sum_{i>p} a_i\varepsilon_i}_{\overline{S}}$

$\|\underline{S}\|_p \leq \sum_{i\leq p} a_i$ (punktowo $\underline{S} \leq \sum_{i\leq p} a_i$)

$\|\overline{S}\|_p \underset{\text{Chinczyn}}{\leq} C\sqrt{p}\sqrt{\sum_{i>p} a_i^2}$.

Krok II $\|S\|_p$ – z dołu

1° $\quad \|S\|_p \underset{\text{monot.}}{\geq} \|\underline{S}\|_p = \left(\mathbb{E}|\underline{S}|^p\right)^{1/p} \geq \left(\frac{1}{2^{\lceil p\rceil}}\left(\sum_{i\leq p} a_i\right)^p\right)^{1/p}$

$\sim \sum_{i\leq p} a_i$

Pozostaje $\|S\|_p \gtrsim \sqrt{p}\left(\sum_{i>p} a_i^2\right)^{1/2}$

Na potęgę

$$\|S\|_p \gtrsim \sum_{i\le p} a_i \ge \lfloor p\rfloor a_{\lfloor p\rfloor} = \sqrt{\lfloor p\rfloor}\sqrt{\lfloor p\rfloor a_{\lfloor p\rfloor}^2} \gtrsim \sqrt{p}\sqrt{\sum_{i>p} a_i^2}$$

1° $\sum_{i>p} a_i^2 \le 2\lfloor p\rfloor a_{\lfloor p\rfloor}^2$

2° $\sum_{i>p} a_i^2 > 2\lfloor p\rfloor a_{\lfloor p\rfloor}^2$

Wyjmujemy z $\mathbb{N}\cap(p,\infty)$ odcinki $I_1, I_2, \dots$ t. że

$$\bullet \sum_{i\in I_k} a_i^2 \ge \frac{\sum_{i>k} a_i^2}{2\lfloor p\rfloor}$$

$\lceil p\rceil$ I_1 I_2 I_3 ...

W ten sposób

I_1: wrzucamy $\lceil p\rceil, \lceil p\rceil+1, \dots$ dopóki ~~dopóki i przestajemy, gdy tylko~~

$$\sum_{i\in I_k} a_i^2 < \frac{\sum_{i>p} a_i^2}{2\lfloor p\rfloor}$$

ostatni wrzucony do I_1 zmienia tę nierówność na $\ge$

(to nastąpi, bo $2\lfloor p\rfloor \not< 1$)

I_2 tak samo, ale zaczynamy tam gdzie I_1 się skończyło

Ile co najmniej przedziałów zrobimy?

$$a_i^2 \le a_{\lfloor p\rfloor}^2 < \frac{\sum_{i>p} a_i^2}{2\lfloor p\rfloor}$$

$$\sum_{i\in I_s} a_i^2 = \sum_{i\in I_s - ost} a_i^2 + a_{ost\, z\, I_s}^2 < \cancel{2}\frac{\sum_{i>k} a_i^2}{\cancel{2}\lfloor p\rfloor}$$

więc będzie $\ge \lfloor p\rfloor+1$ przedziałów $I_1, I_2, \dots, I_{\lfloor p\rfloor}, I_{\lfloor p\rfloor+1}$.

$$S_k = \sum_{i\in I_k} a_i\varepsilon_i, \qquad \sigma_k = \sqrt{\sum_{i\in I_k} a_i^2} \ge \sqrt{\frac{\sum_{i>p} a_i^2}{2\lfloor p\rfloor}}$$

i szacujemy z dołu $\|S\|_p \ge \|S_1+\dots+S_{\lfloor p\rfloor}\|_p \ge c\sqrt{\lfloor p\rfloor}\sqrt{\sum_{i>p} a_i^2}$

Czeb. $c = \frac{\sqrt{x}}{4}$

$$\mathbb{P}\left(S_1+\dots+S_{\lfloor p\rfloor} \ge \frac{\sqrt{\lfloor p\rfloor}}{4}\sqrt{\sum_{i>p} a_i^2}\right)^{1/p}$$

$$\ge \mathbb{P}\left(\forall_{k\le\lfloor p\rfloor}\, S_k \ge \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\lfloor p\rfloor}}\right)^{1/p} \qquad \frac{\lfloor p\rfloor}{2\sqrt{\lfloor p\rfloor}}\sqrt{\frac{\sum\sigma^2}{2\lfloor p\rfloor}}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{\lfloor p\rfloor} \mathbb{P}\Big(S_k \ge \underbrace{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\sigma^2}{2\lfloor p\rfloor}}}_{\le\, \sigma_k/2}\Big)\right)^{1/p} \underset{p\ge 2}{\ge} x^{\lfloor p\rfloor/p} \ge \sqrt{x}.$$

$\square$