Dylatacje a miara Gaussa

Tomasz Tkocz

8.10.2010r.

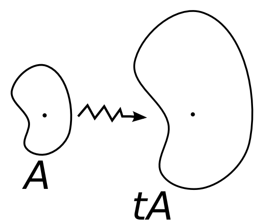
Streszczenie

Tekst zawiera notatki do referatu z seminarium magisterskiego *Rachunek prawdopodobieństwa*. Celem jest przedstawienie tematu, którego dotyczy praca magisterska autora [Tko]. Rozważa się dylatacje zbiorów symetrycznych i wypukłych i to jak szybko rośnie ich miara Gaussa. Głównym zadaniem było przeniesienie wyników z pracy [LatOle] na przypadek zespolony.

1. Ustalmy na samym początku terminologię[1]. **Dylatacją** o skali $t > 0$ nazywamy przekształcenie

$$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto tx \in \mathbb{R}^n$$

(jednokładność o środku w 0 i skali t). Weźmy borelowski zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$. Jak zmienia się miara



Rysunek 1: Dylatacja o skali t

Lebesgue'a jego dylatacji? To bardzo łatwe

$$|tA| = t^n |A|.$$

A jak zmienia się miara Gaussa[2] γ_n Innymi słowy, co można powiedzieć o funkcji

$$f_A(t) = \gamma_n(tA), \qquad t > 0?$$

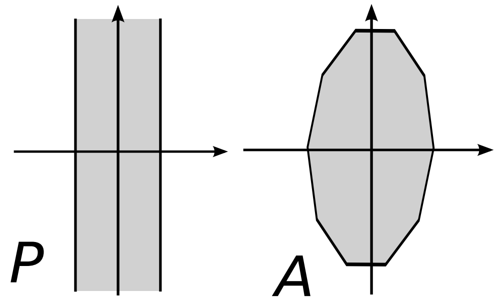
Hipoteza 1 (Shepp[3], 1969)**.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie wypukły i symetryczny ($A = -A$), zaś $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| \leqslant p\}$ niech będzie* ***pasem*** *o* ***szerokości*** *$2p$ tak dobranej, aby $\gamma_n(A) = \gamma_n(P)$. Wtedy*

$$\begin{aligned} f_A(t) &\geqslant f_P(t), \qquad \textit{dla } t \geqslant 1, \\ &\leqslant f_P(t), \qquad \textit{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{aligned} \tag{S}$$

[1] wszystkie niestandardowe oznaczenia użyte w tekscie starano się wyjaśniać w stosownych miejscach w przypisach

[2] Chodzi nam o standardową miarę Gaussa, czyli o miarę z gęstością $\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-|x|^2/2}$.

[3] Lawrance (a.k.a. Larry) Shepp — amerykański statystyk i probabilista. Doktorat zrobił u Fellera w Princeton. Znany nam (studentom MIM UW, czyli czytelnikom podręcznika Jakubowskiego i Sztencla) z Zadania z †: Udowodnić, że jeśli X, Y to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie i o średniej zero, to $\mathbb{E}|X+Y| \geqslant \mathbb{E}|X-Y|$



Rysunek 2: Oszacowanie (S) na rysunku — optymalne są pasy

2. Historia tego problemu jest dosyć długa, bo został rozwiązany dopiero w 1999 roku, ale po kolei.

- 1969 — Shepp, postawienie problemu w nieopublikowanym manuskrypcie
- 1974 — Sudakov, Zalgaller, [SudZal], rozwiązanie dla $n = 3$ i nie tylko dla γ_3, ale dla dowolnej miary log-wklęsłej
- 1991 — Szarek, [Sza], postawienie problemu w publikacji i odtąd problem znany jako *S-conjecture*
- 1993 — Kwapień, Sawa, [KwaSaw], rozwiązanie dla zbiorów symetrycznych, ale względem każdej osi
- 1999 — Latała, Oleszkiewicz, [LatOle], rozwiązanie problemu

3. Niby sprawa *S-conjecture* jest tym samym zamknięta, ale można tę listę wydłużyć stawiając nowe pytania. Na przykład, jakie zbiory są optymalne w klasie zbiorów symetrycznych (rezygnujemy z wypukłości)? A jakie w klasie zbiorów wypukłych? Można też zrobić wycieczkę w świat zespolony i właśnie tego dotyczyła praca magisterska piszącego te słowa.

Hipoteza 2. *Niech ν_n to standardowa miara Gaussa na $\mathbb{C}^n \underset{\text{izomorfizm } j}{\approx} \mathbb{R}^{2n}$ (tzn. $\nu_n(A) = \gamma_{2n}(j(A))$). Niech $A \subset \mathbb{C}^n$ będzie*

- *wypukły (w zwykłym rzeczywistym sensie, że dla każdego $t \in [0, 1]$ jest[4] $tA + (1 - t)A \subset A$),*
- ***rotacyjnie symetryczny**, tzn. dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ o module 1 jest $\lambda A = A$.*

*Niech $P = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| \leqslant p\}$ będzie **cylindrem** o **promieniu** p takim, że $\nu_n(A) = \nu_n(P)$. Wtedy*

$$\text{(T)} \qquad \begin{aligned} \nu_n(tA) &\geqslant \nu_n(tP), && \text{dla } t \geqslant 1, \\ &\leqslant \nu_n(tP), && \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{aligned}$$

To co udało się zrobić do tej pory, to następujące twierdzenia (patrz [Tko])

Twierdzenie 1. *Istnieje stała $c > 0,64$, że nierówności* (T) *zachodzą dla wszystkich t takich, że $\nu_n(tA) \leqslant c$. W szczególności*

$$\nu_n(A) \leqslant c \quad \Longrightarrow \quad \nu_n(tA) \leqslant \nu_n(tP), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

[4] Posługiwać się będziemy często notacją $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$ oraz $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

Twierdzenie 2. *Istnieje stała K, że dla zbiorów A, P jak w Hipotezie 2 zachodzi*

$$\nu_n\left((1+K(t-1))A\right) \geqslant \nu_n(tP), \qquad t \geqslant 1.$$

Uwaga 1. Udowodniono to twierdzenie ze stałą $K = 3$. Stała $K = 1$ rozwiązywała by hipotezę.

4. Przejdziemy teraz do omówienia techniki z pracy [LatOle] pozwalającej uzyskać powyższe rezultaty. Jest to, jak mam nadzieje zobaczymy, ładny kawałek matematyki i można się wiele nauczyć. Skupimy się dla prostoty jednak na przypadku rzeczywistym. Idea jest prosta: sprowadzić problem z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^2$, gdzie będzie już można coś policzyć.

Fakt 1 (Kwapień, Sawa)**.** *Dla każdych zbiorów A i P jak w Hipotezie 1 zachodzi* (S) *wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi dla nich nierówność*

$$f'_A(1) \geqslant f'_P(1).$$

Dowód. „$\Longrightarrow$" To jest bardzo łatwe, bo wobec wyboru pasa P jest $f_A(1) = f_P(1)$, więc z nierówności (S)

$$f'_A(1) \longleftarrow \frac{f_A(1+h) - f_A(1)}{h} \geqslant \frac{f_P(1+h) - f_P(1)}{h} \longrightarrow f'_P(1).$$

„$\Longleftarrow$" Określamy funkcję $h\colon (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ poprzez warunek

$$f_A(t) = f_P(h(t)).$$

Naszym celem jest wykazać, że dla $t \geqslant 1$ jest $h(t) \leqslant t$, a dla $t \leqslant 1$ — $h(t) \geqslant t$. Zauważmy, że $f_A(t) = f_P(h(t))$ jest równoważne równości $f_{tA}(1) = f_{h(t)P}(1)$, a ona, zakładamy, że implikuje nierówność na pochodnych

$$f'_{tA}(1) \geqslant f'_{h(t)P}(1).$$

Ale $f'_{tA}(1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=1} f_{tA}(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=1} f_A(ts) = t f'_A(t)$ i tak samo $f'_{h(t)P}(1) = h(t) f'_P(h(t))$. Różniczkując zaś $f_{tA}(1) = f_{h(t)P}(1)$ dostajemy, że $f'_A(t) = h'(t) f'_P(h(t))$ i zbierając to razem do kupki widzimy, że

$$t h'(t) \geqslant h(t) \Longleftrightarrow \left(\frac{h(t)}{t}\right)' \geqslant 0.$$

Oznacza to, że funkcja $\frac{h(t)}{t}$ jest rosnąca, a to kończy dowód. $\square$

Uwaga 2. Dla ustalonego zbioru A policzmy pochodną funkcji f_A w $t = 1$

$$\begin{aligned} f'_A(1) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1} \int_{tA} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-|x|^2/2} \mathrm{d}x \underset{x=ty}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1} \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} t^n e^{-t^2|y|^2/2} \mathrm{d}y \\ &= \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \left(n t^{n-1} - t^{n+1}|y|^2\right) e^{-t^2|y|^2/2} \mathrm{d}y \Big|_{t=1} = n\gamma_n(A) - \int_A |y|^2 \mathrm{d}\gamma_n(y). \end{aligned}$$

Zatem

$$f'_A(1) \geqslant f'_P(1) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_P |y|^2 \mathrm{d}\gamma_n(y) \geqslant \int_A |y|^2 \mathrm{d}\gamma_n(y).$$

Wniosek 1 (Kule są optymalne dla oszacowania z góry)**.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie wypukły i symetryczny, zaś $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leqslant R\}$ niech będzie kulą o promieniu R tak dobranym, aby $\gamma_n(A) = \gamma_n(B)$. Wtedy*

$$\begin{aligned} f_A(t) &\leqslant f_B(t), &\quad \text{dla } t \geqslant 1, \\ &\geqslant f_B(t), &\quad \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{aligned}$$

Dowód. Wobec Uwagi 2 i Faktu 1 wystarczy strawdzić, że drugi moment na A jest co najmniej taki jak na B. Ale ten moment łatwo policzyć całkując przez części

$$\begin{aligned}\int_A |y|^2 \mathrm{d}\gamma_n(y) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty 2t\mathbb{1}_{\{t\leqslant|y|\}}\mathbb{1}_A(y)\mathrm{d}t\mathrm{d}y \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty 2t\gamma_n(A\cap\{|y|\geqslant t\})\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_0^\infty 2t\gamma_n(B\cap\{|y|\geqslant t\}) = \int_B |y|^2\mathrm{d}\gamma_n(y),\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z punktowej nierówności $\gamma_n(A\cap\{|y|\geqslant t\})\geqslant\gamma_n(B\cap\{|y|\geqslant t\})$. Jest ona ona jasna dla t tak dużych, że $\gamma_n(B\cap\{|y|\geqslant t\})=0$. Dla t takich, że $\gamma_n(B\cap\{|y|\geqslant t\})>0$ szacujemy tak

$$\begin{aligned}\gamma_n(A\cap\{|y|\geqslant t\}) &= \gamma_n(A\setminus\{|y|<t\}) \geqslant \gamma_n(A)-\gamma_n(\{|y|<t\}) = \gamma_n(B)-\gamma_n(\{|y|<t\}) \\ &= \gamma_n(B\setminus\{|y|<t\}) = \gamma_n(B\cap\{|y|\geqslant t\}).\end{aligned}$$

□

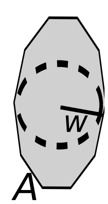
To było zupełnie techniczne. Przed kolejnym krokiem przyda się pojęcie miary brzegu. Jeśli μ jest miarą borelowską na $\mathbb{R}^n$, to określamy

$$\mu^+(A) = \underline{\lim}_{\epsilon\to 0+}\frac{\mu(A_\epsilon)-\mu(A)}{\epsilon},$$

gdzie $A_\epsilon = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x,A)\leqslant\epsilon\}$ jest ϵ-otoczką zbioru A ($A_\epsilon = A + B(0,\epsilon)$).

Fakt 2 (wypukłość)**.** *Niech* $w=\sup\{r\geqslant 0 \mid B(0,r)\subset A\}$ *będzie* promieniem *zbioru* A. *Wtedy*

$$f_A'(1)\geqslant w\gamma_n^+(A).$$



Rysunek 3: Promień zbioru

Dowód. Bez utraty ogólności można zakładać, że $0<w<\infty$, bo jeśli A jest zawarty w pewnej $n-1$ wymiarowej podprzestrzeni, to jest miary 0 i wszystko jasne. W przeciwnym przypadku, zawiera nietrywialną kulę (z wypukłości i symetrii), więc $w>0$, zaś gdyby $w=\infty$, to $A=\mathbb{R}^n$ i też łatwo.

Mamy $B(0,w)\subset A$, więc z wypukłości, dla $x\in A$, zachodzi

$$tx+(1-t)B(0,w)\subset A,$$

więc

$$x+B\left(0,\left(\frac{1}{t}-1\right)w\right)\subset\frac{1}{t}A,$$

więc przyjmując oznaczenie $1/t=1+h$, z dowolności x, mamy

$$A+B(0,hw)\subset(1+h)A.$$

Stąd szacujemy tak

$$
\begin{aligned}
f'_A(1) &= \lim_{h\to 0+} \frac{f_A(1+h) - f_A(h)}{h} = w \lim_{h\to 0+} \frac{\gamma_n((1+h)A) - \gamma_n(A)}{h} \\
&\geqslant w \lim_{h\to 0+} \frac{\gamma_n(A + B(0, hw)) - \gamma_n(A)}{hw} = w\gamma_n^+(A).
\end{aligned}
$$

$\square$

Uwaga 3. Dla pasa P mamy w powyższym fakcie równość

$$
f'_P(1) = p\gamma_n^+(P).
$$

Przypomnijmy, że na mocy Faktu 1 naszym celem jest udowodnić, że $f'_A(1) \geqslant f'_P(1)$. Wystarczy zatem udowodnić coś a'la izoperymetria

$$
w\gamma_n^+(A) \geqslant p\gamma_n^+(P).
$$

Fakt 3 (redukcja wymiaru)**.** *Dokonajmy **symetryzacji Ehrharda** naszego zbioru A*

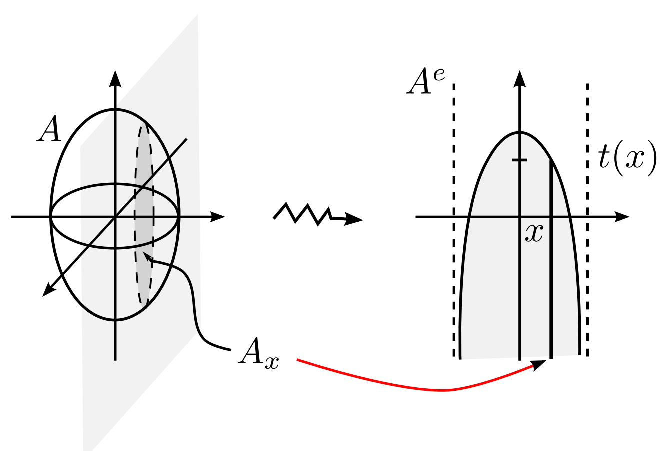
$$
\mathbb{R}^n \supset A \underset{\textit{symetryzacja Ehrharda}}{\rightsquigarrow} A^e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geqslant t(x)\},
$$

gdzie $t(x)$ jest zdefiniowane tak, aby miara γ_{n-1} cięcia $A_x = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x, y) \in A\}$ była równa jednowymiarowej mierze Gaussa półprostej $(-\infty, t(x))$. Symetryzacja Ehrharda ma następujące własności

(i) zachowuje miarę $\gamma_n(A) = \gamma_2(A^e)$

(ii) nie powiększa brzegu, tzn. $\gamma_n^+(A) \geqslant \gamma_2^+(A^e)$

(iii) zachowuje pasy, tzn. P^e też jest pasem o tej samej szerokości co pas P



Rysunek 4: Symetryzacja Ehrharda zbioru

Dowód. (i), (iii) Oczywiste.

(ii) Wobec *(i)* wystarczy udowodnić, że $\gamma_n(A+B(0,\epsilon)) \geqslant \gamma_2(A^e+B(0,\epsilon))$, bo wtedy już będziemy mieć, że

$$\gamma_n^+(A) \longleftarrow \frac{\gamma_n(A+B(0,\epsilon)) - \gamma_n(A)}{\epsilon} \geqslant \frac{\gamma_2(A^e+B(0,\epsilon)) - \gamma_2(A^e)}{\epsilon} \longrightarrow \gamma_2^+(A^e).$$

Nierówność $\gamma_n(A+B(0,\epsilon)) \geqslant \gamma_2(A^e+B(0,\epsilon))$ jest z kolei implikowana przez twierdzenie Fubiniego, gdy dla każdego $x \in (-w,w)$ będzie

$$\gamma_{n-1}\left((A+B(0,\epsilon))_x\right) \geqslant \gamma_1\left((A^e+B(0,\epsilon))_x\right).$$

Udowodnimy teraz tę nierówność. Ustalmy $t \in (A^e+B(0,\epsilon))_x$, tzn. $(x,t) \in A^e+B(0,\epsilon)$, tzn. istnieją x' i t', że $(x',t') \in A^e$ i $\underbrace{|x-x'|}_{\epsilon_x}{}^2 + \underbrace{|t-t'|}_{\epsilon_y}{}^2 \leqslant \epsilon^2$. Wobec

$$(A+B(0,\epsilon))_x \supset A_{x'} + B(0,\epsilon_y),$$

jest

$$\gamma_{n-1}\left((A+B(0,\epsilon))_x\right) \geqslant \gamma_{n-1}\left(A_{x'}+B(0,\epsilon_y)\right) \underset{\text{izoperymetria}}{\geqslant} \gamma_{n-1}(H+B(0,\epsilon_y)),$$

gdzie H to półprzestrzeń tej samej miary γ_{n-1} co $A_{x'}$[5]. Używając gaussowskiej dystrybuanty Φ[6] możemy łatwo liczyć miarę półprzestrzeni (jeśli $H = (-\infty, x) \times \mathbb{R}^{n-1}$, to $\gamma_n(H) = \Phi(x)$) i zapisać, że

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}\gamma_{n-1}\left((A+B(0,\epsilon))_x\right) &\geqslant \Phi^{-1}\gamma_{n-1}(H+B(0,\epsilon_y)) = \Phi^{-1}\gamma_{n-1}(H) + \epsilon_y \\ &= \Phi^{-1}\gamma_{n-1}(A_{x'}) + \epsilon_y \geqslant t' + \epsilon_y \geqslant t.\end{aligned}$$

Zatem

$$\gamma_{n-1}\left((A+B(0,\epsilon))_x\right) \geqslant \Phi(t) = \gamma_1((-\infty,t))$$

i biorąc supremum po $t \in (A^e)_x$ mamy to o co chodziło. □

Zbierając Fakty 1 - 3, wystarczy wykazać, że

$$w\gamma_2^+(A^e) \geqslant p\gamma_2^+(P^e).$$

Jesteśmy już w $\mathbb{R}^2$, ale gdzie jest to co tygryski lubią najbardziej, czyli rachunki? Trzeba jeszcze na koniec zauważyć, że zbiór A^e ma bardzo przyjemną strukturę. Otóż jest to podwykres funkcji

$$[-w,w] \ni x \overset{f}{\longmapsto} \Phi^{-1}\gamma_n(A_x)$$

Z naszych założeń o zbiorze A wynika, że nie może ona być byle jaka.

Fakt 4. *Z wypukłości i symetrii zbioru A wynika, że funkcja f jest wklęsła i parzysta.*

Dowód. Parzystość jest jasna, bo z symetrii zbioru A mamy, że $A_{-x} = -A_x$. Wypukłosc zbioru A daje, że dla dowolnych $\lambda \in [0,1]$ i $x,y \in A$

$$A_{\lambda x+(1-\lambda)y} \supset \lambda A_x + (1-\lambda)A_y,$$

[5]Dla $A \subset \mathbb{R}^n$ i półprzestrzeni H o tej samej mierze γ_n co A gaussowska nierówność izoperymetryczna głosi, że $\gamma_n(A+B(0,\epsilon)) \geqslant \gamma_n(H+B(0,\epsilon))$

[6]$\Phi(x) = \gamma_1((-\infty,x)) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} \mathrm{d}s$

skąd wobec nierówności Ehrharda[7] otrzymujemy wklęsłość funkcji f

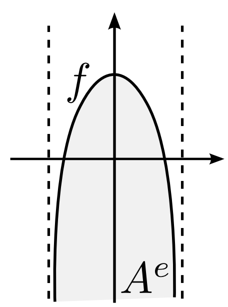
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \Phi^{-1}\gamma_{n-1}(A_{\lambda x+(1-\lambda)y}) \geqslant \Phi^{-1}\gamma_{n-1}(\lambda A_x + (1-\lambda)A_y)$$
$$\overset{\text{Ehrhard}}{\geqslant} \lambda\Phi^{-1}\gamma_{n-1}(A_x) + (1-\lambda)\Phi^{-1}\gamma_{n-1}(A_y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

□

Dzięki odpowiedniej aproksymacji można nawet zakładać, że f jest gładka i w $\pm w$ ucieka do $-\infty$. Mamy więc izoperymetryczny problem w $\mathbb{R}^2$

$$\gamma_2(A) = \gamma_2(P) \quad\Longrightarrow\quad w\gamma_2^+(A) \geqslant p\gamma_2^+(P).$$

Wszystkie wielkości tutaj występujące wyrażają się za pomocą funkcji f (przez jakieś okropne całki), więc reszta to mięcho, czyli rachunki. Patrz [LatOle], [Tko].



Rysunek 5: Problem izoperymetryczny w $\mathbb{R}^2$ dla szczególnego rodzaju zbiorów

Literatura

[Ehr] A. Ehrhard, *Symetrisation dans l'espace de Gauss*, Math. Scand., **53** (1983), 281–301

[KwaSaw] S. Kwapień and J. Sawa, *On some conjecture concerning Gaussian measures of dilatations of convex symmetric sets*, Studia Math., **105** (1993), 173–187

[LatOle] R. Latała and K. Oleszkiewicz, *Gaussian measures of dilatations of convex symmetric sets*, The Annals of Probability, **27** (1999), 1922–1938

[SudZal] V. N. Sudakov and V. A. Zalgaller, *Some problems on centrally symmetric convex bodies*, Problems in global geometry. Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **45** (1974), 75–82 (in Russian)

[Sza] S. Szarek, *Condition numbers of random matrices*, J. Complexity **7** (1991), 131–149

[Tko] T. Tkocz, *Gaussian measures of dilations of convex rotationally symmetric sets in* C^n, arXiv:1007.2907v1 [math.PR] (2010)

[7] [Ehr], dla zbiorów wypukłych i domkniętych $A, B \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$\Phi^{-1}\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \lambda\Phi^{-1}\gamma_n(A) + (1-\lambda)\Phi^{-1}\gamma_n(B)$$