CIEKAWSZE ZADANIA z GAL-u I (głównie z ćwiczeń)

1. Znajdź przekształcenie liniowe $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ takie że
A
   (a) $\mathbb{R}^2 = \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi$
   (b) $\mathbb{R}^2 \neq \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi$

2. Niech $f, g: V \longrightarrow W$ będą przekształceniami liniowymi. Są równoważne
B
   (1) $\ker f \subset \ker g$
   (2) $\exists$ przekształcenie liniowe $h: W \longrightarrow W$ $g = h \circ f$.

3. Niech $\varphi: V \longrightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym i $\varphi^2 = id$, gdzie V jest przestrzenią
B
liniową nad ciałem K ($\operatorname{char} K \neq 2$). Pokazać, że istnieją podprzestrzenie $V_1, V_2 \subset V$
że φ jest symetrią względem V_1 wzdłuż V_2.

4. Niech $A \in M_{m\times n}$ i $r(A) = 1$. Wykazać, że istnieją $B \in M_{m\times 1}$, $C \in M_{1\times n}$ takie, że $A = BC$.
B

5. Niech $A \in M_{n\times n}$ i $r(A) = r$. Obliczyć wymiar przestrzeni macierzy kwadratowych X
B
takich, że $AX = 0$.

6. Niech $A, B \in M_{2007\times 2007}$ i $AB = 0$. Wykazać, że przynajmniej jedna z macierzy
C
$A + A^T$, $B + B^T$ ma rząd < 2007

7. Niech $A \in M_{n\times n}$ i $A^2 = I$. Pokazać, że $r(I + A) + r(I - A) = n$.
B

8. Dane jest przekształcenie liniowe $\varphi: V \longrightarrow V$ oraz wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V$ takie, że
B
są one różne od wektora zerowego, parami różne i $\varphi(\alpha_1) = \alpha_1$, $\varphi(\alpha_i) = \alpha_i + \alpha_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, k$.
Wykazać, że $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są lnz

9. Niech V to przestrzeń liniowa, U_1, U_2 to jej podprzestrzenie i $\dim V = 10$, $\dim U_1 = 3$,
A
$\dim U_2 = 6$. Niech $E = \{ h \in \operatorname{End}(V) \mid h(U_1) \subset U_1,\ h(U_2) \subset U_2 \}$. Obliczyć $\dim E$.

10. Niech X to nieosobliwa macierz o kolumnach $X_1, \dots, X_n$ a Y - macierz
B
o kolumnach $X_2, \dots, X_n, 0$. Wykaż, że $A = YX^{-1}$, $B = X^{-1}Y$ są rzędu $n-1$.

11. Niech M to macierz blokowa stopnia $2n$: $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. Jest ona odwracalna
C
gdzie $M^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$. Udowodnić, że $\det M \cdot \det H = \det A$.

12. Niech A będzie kwadratową macierzą całkowito liczbową. Wykazać, że A^{-1} jest
B
macierzą całkowito liczbową wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A = \pm 1$.

13. Niech $M_{2n\times 2n} \ni R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, gdzie A jest nieosobliwą macierzą kwadratową stopnia n.
C
Wykazać, że $r(R) = n \iff D = CA^{-1}B$

14. Obliczyć $\left| \binom{n+i-1}{j-1} \right|_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k}}$ (wyznacznik macierzy).
B

15. Obliczyć $\left| 1+x_i y_i \right|_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$.
A

16. Wykazać, że
C

$$\begin{vmatrix} 51237 & 79922 & 55538 & 39177 \\ 46152 & 16596 & 37189 & 82561 \\ 71489 & 23165 & 26563 & 61372 \\ 44350 & 42391 & 91185 & 64809 \end{vmatrix} \neq 0$$

17. Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \dots, -n+1\}$ będą parami różne. Wykazać, że
C

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \\ \frac{1}{\lambda_1+1} & \frac{1}{\lambda_2+1} & \dots & \frac{1}{\lambda_n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\lambda_1+n-1} & \frac{1}{\lambda_2+n-1} & \dots & \frac{1}{\lambda_n+n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

18. Wykazać, że jeśli macierz A stopnia n ma zerową podmacierz B rozmiaru $k \times l$
B
oraz $k+l > n$, to $\det A = 0$.

19. Niech $A \in M_{n\times n}$ i dla pewnego m jest $A^m = 0$. Pokazać, że $A^n = 0$.
C

20. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową, a $f: V \to V$ przekształceniem
C
liniowym takim, że $r(f) \leq \frac{1}{2} \dim V$. Udowodnić, że f jest złożeniem dwóch nilpotentnych (?) $V \to V$.

21. Udowodnić, że $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \dots\}$ jest układem lnz wektorów w przestrzeni
C
$\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$.

22. $f \in \mathrm{End}(V)$, $\dim V = n$; każda podprzestrzeń $W \subset V$ taka, że $\dim W = n-1$ jest
B
f niezmiennicza. Wykazać, że f jest homotetią.

23. Znajdź wielomian charakterystyczny macierzy: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.
B
(Nie obliczając wyznaczników!)

24. Wykaż, że wartości podstawowych funkcji symetrycznych na wartościach własnych
C
macierzy A są równe sumom wszystkich minorów głównych odpowiednich stopni macierzy A, tzn.

$\sum \lambda_i = \mathrm{tr}\, A$, $\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$ = suma minorów głównych st 2, $\dots$, $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A$.

(DEF. Minor główny stopnia k macierzy A to wyznacznik powstały z A przez skreślenie $n-k$ kolumn i $n-k$ wierszy na przecięciu których stoi $n-k$ elementów przekątnej).

25. Wykaż, że dla $A, B \in M_{n\times n}$ macierze AB, BA mają te same wartości własne.
B

26. (a) Wykaż, że dla $A, B \in M_{n\times n}$ macierze AB, BA mają ten sam wielomian charakterystyczny.
C
(b) Niech $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times m}$, $m \leq n$. Wykaż, że BA ma te same wartości własne
co AB (i to z krotnościami) + wartość własna 0 (z pewną krotnością).

27. Niech $A \in M_{n \times n}$ jest odwracalna o sumie elementów każdego wiersza s. Wykazać, że
B
suma elementów każdego wiersza A^{-1} wynosi s^{-1}.

28. Niech $f \in End(V)$, $\dim V < \infty$, $f^2 = -id$. Wtedy
C
(a) $\dim V$ jest liczbą parzystą,

(b) $\det f = 1$

29. Wiadomo, że jeśli dla $A, B \in M_{n \times n}$ jest $A = CBD$ dla pewnych macierzy
B
nieosobliwych $C, D \in M_{n \times n}$, to $r(A) = r(B)$. Czy odwrotnie? Czyli, czy dla dowolnych $A, B \in M_{n \times n}$ takich, że $r(A) = r(B)$ istnieją macierze nieosobliwe $C, D \in M_{n \times n}$, że $A = CBD$?

30. Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie ustalone i niech $f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $f(X) = AX$.
C
Wykazać, że $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ jest sumą prostą n podprzestrzeni f niezmienniczych. Znaleźć wielomian charakterystyczny f.

31. $f \in End(V)$, $\dim V < \infty$. Wykazać, że
A
(a) Wielomian charakterystyczny f dzieli się przez wielomian charakterystyczny $f|W$, gdzie W jest podprzestrzenią f niezmienniczą.

(b) Jeśli $V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$, gdzie W_i to podprzestrzenie f niezmiennicze, to wielomian charakterystyczny f jest iloczynem wielomianów charakterystycznych $f|W_i$.

32. $A \in M_{n \times n}$, λ^2 jest wartością własną A^2. Wykazać, że λ lub $-\lambda$ to wartość własna A.
B

33. $f: \mathbb{R}[x]_5 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_5$, $f(w)(x) = w(3x+1)$, $w \in \mathbb{R}_5[x]$. Znaleźć wartości własne f.
B

34. $A \in M_{n \times n}$, $r(A) = 1$. Pokazać, że $\det(A + I) = 1 + \operatorname{tr} A$.
C

35. Wypisać wszystkie postaci Jordana macierzy o wielomianie charakterystycznym $(\lambda-3)^4(\lambda+2)^3$.
A

36. Wiadomo, że $f \in End(V)$ (V nad $\mathbb{C}$) ma tylko jedną jednowymiarową podprzestrzeń
B.
niezmienniczą. Znaleźć postać Jordana f.

37. Co potrzeba i wystarcza, żeby macierz $\begin{bmatrix} & & & x_1 \\ & & x_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ x_n & & & \end{bmatrix}$ była diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$? Co nad $\mathbb{R}$?
C

38. Opisać postać Jordana macierzy A^3, gdzie A to jednoklatkowa macierz Jordana z war wł λ.
C

39. Niech $F : (\mathbb{Z}_5)^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ będzie sumą wszystkich funkcjonałów $f \in (\mathbb{Z}_5^3)^*$. Wyznaczyć $\ker F$.
B

40. (Tw. o izomorfizmie) Niech V, W to przes. lin., $f \in L(V,W)$. Wówczas $V/\ker f \simeq \operatorname{im} f$.
C

41. Wykazać, że jeśli macierze $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ są podobne nad $\mathbb{C}$ to są też podobne nad $\mathbb{R}$.
C

42. Wykazać, że dla dowolnej macierzy A, A i A^T są podobne.
B

43. Niech $u_0=0$, $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+4}$. Zbadać zbieżność i znaleźć granicę (u_n)
B
(Wskazówka: składanie przekształceń homograficznych odpowiada mnożeniu odpowiednich macierzy)

44. $A\in M_{n\times n}$; $r(A)=r(A^2) \iff$ ist. $\lim_{\lambda\to 0}(A+\lambda I)^{-1}A$.
C

45. Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu (x_n) jeżeli $x_0=a$, $x_1=b$, $x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+\frac{1}{3}x_{n-1}$.
B
(Wskazówka: $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1}\end{bmatrix}$ dla pewnej macierzy A)

~~46. Wykazać, że $r(A^2)=r(A) \iff$ istnieje $\lim_{\lambda\to 0}(A+\lambda I)^{-1}A$~~
C

47. Znaleźć wartości własne macierzy $V=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2}\end{bmatrix}$, gdzie $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ i $2\nmid n$.
C
(Wskazówka: obliczyć V^2).

48. Pokazać, że $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5\end{bmatrix}$ spełnia swoje równanie charakterystyczne. Niech $B=2A^4-12A^3$
B
$+19A^2-29A+37I$. Zapisać B^{-1} w postaci $aA+bI$.

49. Niech $0\neq f\in V^*$. Pokazać, że $\ker f$ jest maksymalną właściwą podprzestrzenią V. (Wsk. patrz 40).
C

50. Wykazać, że jeśli $0\neq f\in V^*$, to istnieje $\alpha\in V$, że $V=\operatorname{lin}\alpha\oplus\ker f$
A

51. Wykazać, że jeśli $f,g\in V^*$ i $f(x)g(x)=0$, $x\in V$, to $f\equiv 0$ lub $g\equiv 0$.
B
(Wsk. Jeśli $U,W\subset V$ są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V i $U\cup W=V$, to $U=V$ lub $W=V$)

52. Wykazać, że n funkcjonałów $f_i\in V^*$ jest układem lnz wtw. $\bigcap \ker f_i=\{0\}$
B
(Wsk. Posługiwać się układem równań liniowych)

53. Niech $e_1,\dots,e_n\in V$ (skończenie wymiarowa). Wówczas układ $e_1,\dots,e_n$ jest lnz wtw. $\det[f_i(e_j)]\neq 0$.
A

54. Wykazać, że $\mathbb{Q}[x]^*\not\cong\mathbb{Q}[x]$. (Wsk. Rozważyć moce tych zbiorów).
B

55. Przez końce krawędzi n wym. równoległościanu, wychodzące z wierzchołka A poprowadzono $n-1$ wym.
C
hiperpłaszczyznę, a przez pozostałe wierzchołki hiperpłaszczyzny równoległe. Udowodnić, że te hiperpłaszczyzny dzielą przekątną główną (wychodzącą z A) równoległościanu na n równych części

56. Wykazać, że jeśli przekształcenie afiniczne płaszczyzny ma dokładnie 1 punkt stały, to każda prosta
C
niezmiennicza przechodzi przez ten punkt stały.

57. Znaleźć punkty stałe, proste i płaszczyzny niezmiennicze przekształceń afinicznych
B
$f=(3x-4y+6,\ 4x+3y-8,\ -2z+9)$, $g=(x+y,\ y+z,\ z+1)$, $h=(x+y+1,\ y+z,\ z)$
(Wsk. Szukając prostych niezmien. patrzeć na wektory własne pochodnej, a przy płaszczyznach - na wek. wł. przek. sprzęż.)

58. W n wym. przestrzeni euklidesowej V dane są podprzestrzenie m wym. U,V przy czym
B
$u\perp W$ dla pewnego $0\neq u\in U$. Wykazać, że $w\perp U$ dla pewnego $0\neq w\in W$.

59. Niech $(V,\langle,\rangle)$ to przestrzeń euklidesowa i $\alpha,\beta\in V$. Pokazać, że
B
$\langle\alpha,\beta\rangle=0 \iff \forall_{c\in\mathbb{R}}\ \|\alpha+c\beta\|\geq\|\alpha\|$.

60. Niech $e_1, \dots, e_n$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle , \rangle)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ układem ortonormalnym.
B

Pokazać, że $\sum_{i,j} \cos^2 \alpha_{ij} = k$, gdzie $\alpha_{ij} = \sphericalangle(e_i, \alpha_j)$.

61. Niech $e_1, \dots, e_n$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle , \rangle)$, $\alpha \in V$. Wówczas
B

$\|\alpha\|^2 = \langle \alpha, e_1 \rangle^2 + \dots + \langle \alpha, e_m \rangle^2 \iff \alpha \in \mathrm{lin}(e_1, \dots, e_m)$.

62. Danych jest pięć wektorów w przestrzeni euklidesowej. Wykazać, że długość sumy pewnych
C
dwóch z nich $\leq$ długość sumy pozostałych trzech

63. Niech $(V, \langle , \rangle)$ to przestrzeń euklidesowa wymiaru n i $e_1, \dots, e_{n+1} \in V$ oraz $\forall i \neq j \ \langle e_i, e_j \rangle < 0$.
C
Wtedy dowolny układ ~~sp~~ n wektorów spośród $e_1, \dots, e_{n+1}$ jest bazą V.

(Wsk. Pokazać, że $a_1 e_1 + \dots + a_{n+1} e_{n+1} = 0 \Rightarrow a_i$ ~~są~~ tego samego znaku)

64. Dla jakich $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ forma $F(X,Y) = \mathrm{tr}(X^T P Y)$ jest iloczynem skalarnym?
C

65. Czy w dowolnej przestrzeni euklidesowej suma miar kątów trójkąta $= \pi$? (Odp. Tak)
C
(Wsk. Dowolna przestrzeń euklid jest izometryczna z odp. $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{st})$)

66. Niech $F: \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}$. Wykazać, że jest iloczynem skalarnym
B

(a) $F(p,q) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(t_0) q^{(k)}(t_0)$ (t_0-ustalone) (b) $F(p,q) = \sum_{k=1}^{m} p(t_k) q(t_k)$, $m > n$, $t_i \neq t_j$.

67. Wykazać, że A jest macierzą Grama pewnego iloczynu skalarnego w pewnej bazie $\iff \exists$ S-odwr $A = S^T \cdot S$.
B

68. Macierz G o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, -1\}$ jest macierzą Grama pewnego iloczynu skalarnego
C
w pewnej bazie. Wykazać, że ta baza jest ortonormalna.

(Wsk. Rozumować nie wprost i rozważyć odpowiednie podprzestrzenie rozpięte przez dwa wektory bazowe)