24.10.2011

Moje ulubione zadania z GALu (II Obóz KPM)

1. **ZAD. 1.** Dla dowolnych $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 3$

$$\det \left[\cos(t_i - t_j) \right]_{i,j=1}^{n} = 0$$

(bierze się z funkcji korelacji dla macierzy $\widehat{CUE}_{2\times 2}$)

$$\Uparrow$$

$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 3 \implies \det\left[1 + x_i y_j\right]_{i,j=1}^{n} = 0$

2. **ZAD. 2.** $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \implies$

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \leq \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B$$

(Sylvester)

3. **ZAD. 3.** (Jarnik 2010) $A_1, \dots, A_k$ – rzeczywiste macierze $n\times n$ rzędu $n-1$

$$k < n \implies A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \neq 0$$

4. **ZAD. 4** (egz na doktorat UWr 2004) $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $AB - BA = A \implies \det A = 0$

5. **ZAD 5.** $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\quad \exists m > 0 \;\; A^m = 0 \implies A^n = 0$.

8. **ZAD 6.** Dla macierzy A zespolonej $n\times n$ istnieje baza orton. w której jest ona górnotrójkątna.

10. **ZAD 7*.** $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$\left(\exists m > 0 \;\; A^m = 0\right) \iff \left(\operatorname{tr} A^k = 0,\ k = 1, \dots, n\right)$$

11. **ZAD 8.** (IMC 2009) $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Wówczas

$$\exists m \quad (AB - BA)^m = 0$$

7. **ZAD 9.** (IMC 1994) $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $AB - BA = \alpha A$ dla pewnego $\alpha \neq 0$. Wtedy

$$\exists m \quad A^m = 0.$$

6. **ZAD 10** (eliminacje 2007) $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\exists n \quad (AB - BA)^n = I \implies$

$$(AB - BA)^4 = I.$$

9. **ZAD 11*.** (uogólnienie zad z eliminacji 2011) $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, wtedy

$$\left|\operatorname{tr} A^{2m}\right| \leq \operatorname{tr}(A^{*}A)^m, \quad \text{dla } m \geq 0.$$

Rozwiązania

ZADANIE 1. Zauważamy, że $\cos(t_i - t_j) = \cos t_i \cos t_j + \sin t_i \sin t_j$, więc nasza macierz, to

$$\begin{bmatrix} \cos t_1 & \sin t_1 & 0 \dots 0 \\ \cos t_2 & \sin t_2 & 0 \dots 0 \\ \vdots & & \\ \cos t_n & \sin t_n & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t_1 & \cos t_2 & \dots & \cos t_n \\ \sin t_1 & \sin t_2 & \dots & \sin t_n \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

ZADANIE 2. I sp. Niech f, g to przekształcenia odpowiadające macierzom A, B. Mamy

$$\operatorname{im} f \circ g \subset \operatorname{im} f,$$

więc

$$r(AB) \leq r(A)$$
$$r(B^T A^T) \leq r(B^T) = r(B).$$

Dalej

$$\dim \operatorname{im}(f \circ g) = \dim \operatorname{im} g - \underbrace{\dim \ker f}_{= n - \dim \operatorname{im} f}, \quad \text{gdy } \ker f \subset \operatorname{im} g$$

a ogólnie $\geq$.

II sp. wiersze AB = komb lin. wierszy B, kol AB = komb lin. kol. A $\Rightarrow$ $r(AB) \leq r(A), r(B)$.

Dalej U - odwr $\Rightarrow$ $r(UA) = r(A)$ (z popr $\leq$, $r(A) = r(U^{-1}UA) \leq r(UA)$)

$$A = P \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r(A)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] Q, \quad P, Q \text{ - odwracalne}$$

$$\begin{bmatrix} - & x_1 & - \\ & \vdots & \\ - & x_k & - \\ & \vdots & \end{bmatrix} = X$$

więc

$$r(AB) = r\left(P \left[\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & \end{array}\right] QB\right) = r\left(\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & \end{array}\right]}_{r(A)=k} \cdot \begin{matrix}\text{macierz}\\ \text{rzędu}\\ r(B)\end{matrix}\right)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} - & x_1 & - \\ & \vdots & \\ - & x_k & - \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{bmatrix}\right) \geq k + r(B) - n$$

$X =$ [rzędu r ... rzędu s] $\}k$

$$r \geq r + (\underset{\geq 0}{s+k-n}) = (r+s) + k - n \geq r(B) + k - n. \quad \square$$

ZADANIE 3. Liczymy z poprzedniego

$$r(A_1\cdot\ldots\cdot A_k) \geq \sum_{j=1}^{k} r(A_j) - (k-1)n = k(n-1)-(k-1)n = n-k>0. \quad \square$$

ZADANIE 4. Przypuszczając przeciwnie mielibyśmy

$$\cancel{\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} ...} \qquad B - A^{-1}BA = I,$$

skąd $\operatorname{tr} I = 0$ i ↯. $\square$

ZADANIE 5. Niech m będzie najmniejsze takie, że $A^m=0$. Wtedy

$$\exists v \qquad A^{m-1}v \neq 0.$$

Twierdzimy, że wektory

$$v,\ Av,\ \ldots,\ A^{m-1}v$$

są lnz (bo $\alpha_0 v + \alpha_1 Av + \ldots + \alpha_{m-1}A^{m-1}v = 0 \ / A^{m-1}$

$$\alpha_0 \underbrace{A^{m-1}v}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0, \text{ itd } \alpha_j = 0)$$

Jest ich $m \leq \dim = n$. $\square$

ZADANIE 6. Lecimy indukcją po wymiarze. Dla $n=1$ jasne.
Gdy $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, to ma wektor własny e. Niech
$P:\mathbb{C}^n \to \{e\}^\perp$ - rzut ortogonalny. Mamy

$$PA|\{e\}^\perp : \{e\}^\perp \longrightarrow \{e\}^\perp$$

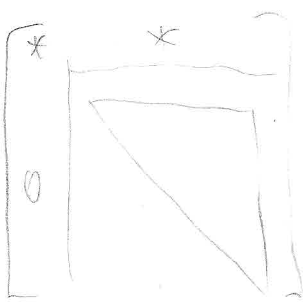
więc dla PA istnieje baza $e_2,\ldots,e_n$ w której macierz PA jest górnotrójkątna. Szukaną bazą jest oczywiście

$$\{\underset{e}{\underset{\parallel}{e_1}}, e_2, \ldots, e_n\},$$

bo $Ae_1 \in \operatorname{lin}\{e_1\}$, $PAe_k \in \operatorname{lin}\{e_2,\ldots,e_k\}$

$$\Downarrow$$

$$Ae_k \in \operatorname{lin}\{e_1,\ldots,e_k\}. \quad \square$$



ZADANIE 7. ⚠ „$\Rightarrow$" jest 😊 analizując wartości własne (muszą być 0).

~~$\operatorname{tr} A = 0 \Rightarrow$ wyraz wolny~~

$$\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^n + \dots + \lambda_n^n = 0 \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_n^n & & \lambda_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

ma zerowy wyznacznik, więc

1° np. $\lambda_1 = 0$, $\{\lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ z krotnościami $n_1, \dots, n_p$

$$\begin{cases} n_1\mu_1 + \dots + n_p\mu_p = 0 \\ n_1\mu_1^2 + \dots + n_p^2\mu_p^2 = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad \overset{p \geq 1}{\rightsquigarrow} \text{ Vandermonde bo } \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_p \end{bmatrix} \text{ - niezerowy } \quad ↯$$

więc $p = 0$ i wszystkie war wł są 0, więc tw Cayleya-Hamiltona kończy

2. ~~Parami różne~~ Różne od 0, wtedy któreś dwie się powtarzają i j.w.

ZADANIE 8. Mamy dla $X := AB - BA$

$$XA = ABA - BA^2 = A^2B - ABA = A(AB - BA) = AX,$$

więc

$$X^{k+1} = X^k(AB - BA) = X^kAB - X^kBA = AX^kB - X^kBA, \quad k \geq 0$$

$$\operatorname{tr} X^{k+1} = 0, \quad k \geq 0$$

więc z zad. 7. teza. $\square$

ZADANIE 9. Najpierw pokażemy indukcyjnie, że

$$A^k B - BA^k = \alpha k A^k, \qquad k \geq 1.$$

$$\Big(A^{k+1}B - BA^{k+1} = A(\alpha k A^k + BA^k) - \overset{BA^{k+1}}{\cancel{(A^k B - \alpha k A^k)A}}$$

$$\cancel{= \alpha \cdot 2^{k+1} A^{k+1}}$$

$$= \alpha k A^{k+1} + \underbrace{(AB - BA)}_{\alpha A} A^k = \alpha(k+1)A^{k+1} \Big).$$

Teraz rozważamy operator

$$L(X) = XB - BX$$

i mówimy że nie może on mieć nieskończenie wielu wartości własnych parami różnych (a miałby $A, A^2, A^3, \ldots$).

wiel. char.

ZAD 11*. Bwo A jest górnotrójkątna. Wtedy

$$|\operatorname{tr} A^{2m}| = \left|\sum_{k=1}^n a_{kk}^{2m}\right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{kk}|^{2m}$$

$$\cancel{= \sum_{k=1}^n |\langle A^m e_k, e_k\rangle|^2}$$

$$\leq \sum_{k=1}^n (\|Ae_k\|^2)^m = \sum_{k=1}^n \langle A^+Ae_k, e_k\rangle^m$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \langle (A^+A)^m e_k, e_k\rangle = \operatorname{tr}(A^+A)^m.$$

⚠ Jensen

Skorzystaliśmy z

⚠ $\|v\| = 1 \Rightarrow \langle Xv, v\rangle^m \leq \langle X^m v, v\rangle$, X - samosp.

D-D. $Xv = \sum \lambda_k \alpha_k v_k$, $v = \sum \alpha_k v_k$, $\sum |\alpha_k|^2 = 1$

$$\langle Xv, v\rangle^m = \left(\sum \lambda_k |\alpha_k|^2\right)^m \leq \sum |\alpha_k|^2 \lambda_k^m = \sum \alpha_k \langle X^m v_k, v\rangle$$

$$= \langle X^m v, v\rangle. \quad \square$$

ZADANIE 10. Ponieważ $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$ możemy zapisać

$$X := AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$X^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{bmatrix} = x I.$$

Mamy dla $m \geq 0$

$X^{2m+1} = x^m X$ ← ma ślad 0, więc n musi być parzyste, powiedzmy $n = 2m$ i wtedy

$$X^{2m} = x^m I = I$$

oznacza, że $x^m = 1$, więc $(x \in \mathbb{R})$ $x^2 = 1$, skąd teza

$$X^4 = x^2 I = I. \quad \square$$