

Pokazaliśmy, że zjawiska mechaniczne zderzeń ciał mogą mieć bardzo łatwą interpretację geometryczną, a tworzenie takich diagramów jest samo w sobie interesujące. Szczególnie prosto można za pomocą tego narzędzia ustalać pewne zależności między wielkościami mierzonymi w układzie środka masy a ich odpowiednikami w układzie laboratoryjnym.

Na deser zostawmy kilka pytań/propozycji do zabawy:

1. Dla jakiej wartości kąta  $\chi$  cząstka pierwotnie spoczywająca będzie miała największą energię? Jaka będzie jej wartość, jeśli energia cząstki padającej wynosi  $E$ ?
2. Dla  $m_1 < m_2$  prędkość pierwszej cząstki po zderzeniu może mieć dowolny kierunek. Jaka jest maksymalna wartość kąta  $\theta_{\max}$  (wyrażona przez masy cząstek) w przypadku  $m_1 > m_2$ ?

3. Pod jakim kątem rozbiegają się cząstki w przypadku równych mas? Jakie są wtedy  $\theta_1$  i  $\theta_2$ ?
4. Ambitniejsze zadanie: jak przetłumaczyć przedstawione schematy na przypadek zderzeń niesprężystych, gdy zderzenie charakteryzuje pewien współczynnik strat energii ( $\mathbf{u}' = -\alpha\mathbf{u}$ ,  $1 \geq \alpha \geq 0$ )?
5. I jeszcze jedno zadanie dla odważnych. Jak zmieniają się wyniki omawiane w tym artykule, jeśli uwzględnić efekty relatywistyczne?

## Nierówność Schwarza a fizyka cząstek elementarnych

Ogólniej,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \stackrel{(S)}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Tomasz TKOCZ\*

Czytelnik z pewnością zetknął się z tytułową nierównością Schwarza, która w najprostszym przypadku mówi, że dla liczb rzeczywistych  $x_1, x_2, y_1, y_2$  zachodzi

$$(*) \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Interpretacja geometryczna jest jasna. Chodzi o to, że iloczyn skalarny dwóch wektorów  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, y_2]$  na płaszczyźnie, który wynosi  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ , nie przekracza iloczynu ich długości, bowiem można wartość iloczynu skalarnego obliczyć także jako  $|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Często twierdzenia matematyczne mają także przyjemną interpretację fizyczną (np. wiele twierdzeń z rachunku różniczkowego i całkowego). Okazuje się, że nierówność Schwarza (\*) jest zaszyta, jak za chwilę zobaczymy, dosyć głęboko w elementarnych prawach mikroświata i relatywistycznych prędkości.

Rozważmy cząstkę elementarną  $c$ , która rozpada się na dwie cząstki  $a$  i  $b$ , poruszające się w przeciwne strony w ich układzie środka masy (np. kaon rozpadający się na parę pionów  $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ ). Wobec tego, że cząstka  $c$  spoczywa, jest intuicyjnie jasne, że masy cząstek spełniają nierówność

$$m_c \geq m_a + m_b.$$

Rzeczywiście, analizując bilans energii w układzie środka masy, stwierdzamy, że energia układu przed reakcją wynosiła  $m_c c^2$ , po reakcji zaś

$$E_a^* + E_b^* = \sqrt{(m_a c^2)^2 + (p_a^* c)^2} + \sqrt{(m_b c^2)^2 + (p_b^* c)^2} \geq m_a c^2 + m_b c^2,$$

skąd

$$(1) \quad m_c c^2 = E_a^* + E_b^* \geq m_a c^2 + m_b c^2.$$

Ale jak wygląda sytuacja z naszej perspektywy, czyli w układzie laboratorium (w skrócie LAB)? Z transformacji Lorentza mamy

$$(2) \quad \begin{aligned} E_a + E_b &= \gamma(E_a^* + \beta p_a^*) + \gamma(E_b^* + \beta p_b^*) = \\ &= \gamma(E_a^* + E_b^*) + \gamma\beta(p_a^* + p_b^*) = \gamma(E_a^* + E_b^*), \end{aligned}$$

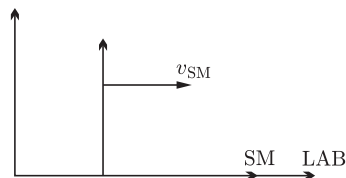
bowiem z definicji układu SM mamy  $p_a^* + p_b^* = 0$ , przy czym tradycyjnie oznacza się  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ,  $\beta = v_{SM}/c$ . Patrząc na nierówność (1), widzimy, że jej prawa strona jest wyrażona wielkościami znanymi w LAB, lewą zaś możemy tak wyrazić, korzystając z powyższego rachunku (2). Dostajemy

$$(m_a + m_b)c^2 \leq E_a^* + E_b^* = \frac{1}{\gamma}(E_a + E_b) = \sqrt{1 - \left(\frac{v_{SM}}{c}\right)^2} (E_a + E_b),$$

więc pozostaje obliczyć  $v_{SM}/c$ . Znowu wystarczy skorzystać z relatywistycznej transformacji energii i pędu (tyle że teraz w drugą stronę, od wielkości z SM

**Układ środka masy** (w skrócie SM) to taki układ odniesienia, w którym całkowity pęd układu wynosi 0.

Całkowita energia cząstki o masie  $m$  i pędzie  $p$  wynosi  $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$ .



Gdy cząstka i układ poruszają się tylko wzdłuż osi  $x$  (tak jak w naszym przypadku), to transformacja Lorentza energii i pędu mówi, że

$$\begin{cases} E = \gamma(E^* + \beta p^*), \\ p = \gamma(p^* + \beta E^*/c), \end{cases}$$

gdzie wielkości z gwiazdką odnoszą się do układu środka masy, a bez gwiazdki do układu LAB.

\*student, Wydział Fizyki oraz Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

do LAB)

$$0 = p_a^* + p_b^* = \gamma \left( p_a - \frac{v_{SM}}{c^2} E_a \right) + \gamma \left( p_b - \frac{v_{SM}}{c^2} E_b \right) = \\ = \gamma \left( p_a + p_b - \frac{v_{SM}}{c^2} (E_a + E_b) \right),$$

skąd

$$\frac{v_{SM}}{c} = c \frac{p_a + p_b}{E_a + E_b}.$$

Wracając, mamy nierówność

$$(m_a + m_b)c^2 \leq \sqrt{1 - \left( c \frac{p_a + p_b}{E_a + E_b} \right)^2} (E_a + E_b) = \\ = \sqrt{(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2 c^2}.$$

Uwzględniając, że

$$E_a = \sqrt{(m_a c^2)^2 + (p_a c)^2}, \quad E_b = \sqrt{(m_b c^2)^2 + (p_b c)^2},$$

podnosząc ostatnią nierówność stronami do kwadratu, skracając obustronnie przez  $c^2$  i upraszczając, dostajemy

$$(3) \quad (m_a c)(m_b c) + p_a p_b \leq \sqrt{(m_a c)^2 + p_a^2} \sqrt{(m_b c)^2 + p_b^2}.$$

Analizując proste zjawisko fizyczne, jakim było zderzenie dwóch cząstek, odtworzyliśmy tym samym nierówność Schwarza dla (dowolnych!) liczb nieujemnych  $x_1 = m_a c$ ,  $x_2 = p_a$ ,  $y_1 = m_b c$ ,  $y_2 = p_b$  (nieujemność liczb w nierówności Schwarza (\*) oczywiście nie uszczupła jej ogólności).

Spróbujmy jeszcze spojrzeć na końcowy wynik (3) nieco ogólniej. W szczególnej teorii względności bardzo wygodnym pojęciem jest tzw. *czterowektor energii-pędu*. Formalnie, dla poruszającej się cząstki o masie  $m$  z pędem  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  i całkowitej energii  $E$ , jej czterowektor energii-pędu definiujemy jako uporządkowaną czwórkę  $(E/c, p_x, p_y, p_z)$  i w skrócie piszemy  $(E/c, \mathbf{p})$ . Jest to pojęcie analogiczne do pojęcia *czterowektora położenia* cząstki  $(ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$ . Takie czterowektory można mnożyć skalarnie. Żeby jednak iloczyn skalarny miał sensowne własności, nie powinien zmieniać się przy przekształceniach niezmiennych fizycznego sensu teorii, tzw. przekształceniach symetrii. W naszym przypadku przekształceniem symetrii jest transformacja Lorentza, a niezmienniczy iloczyn skalarny definiuje się następująco:

$$(E_a/c, \mathbf{p}_a) \cdot (E_b/c, \mathbf{p}_b) := (E_a/c)(E_b/c) - \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b,$$

gdzie  $\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b = p_{a,x} p_{b,x} + p_{a,y} p_{b,y} + p_{a,z} p_{b,z}$  oznacza już *zwykły* iloczyn skalarny w przestrzeni trójwymiarowej. Zauważmy, że wówczas długość czterowektora to po prostu

$$|(E/c, \mathbf{p})| = \sqrt{(E/c, \mathbf{p}) \cdot (E/c, \mathbf{p})} = \sqrt{(E/c)^2 - p^2} = \\ = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - (pc)^2} = mc.$$

Zobaczmy, że (3) jest równoważna nierówności

$$(m_a c)(m_b c) \leq (E_a/c)(E_b/c) - p_a p_b,$$

a w języku czterowektorów i ich iloczynów skalarnych – nierówności

$$(4) \quad |(E_a/c, \mathbf{p}_a)| |(E_b/c, \mathbf{p}_b)| \leq (E_a/c, \mathbf{p}_a) \cdot (E_b/c, \mathbf{p}_b).$$

Zatem uzyskany główny wynik (3) jest niczym innym jak nierównością Schwarza dla czterowektorów energii-pędu cząstek  $a$  i  $b$ ! Tyle że zwrot tej nierówności jest w przeciwną stronę w stosunku do klasycznej nierówności Schwarza, co wynika ze szczególnej postaci iloczynu skalarnego. Stwierdzenie, że zachodzi (3), można więc wyprowadzić bez żadnych, czynionych przez nas pracowicie, rozważań kinematycznych dla cząstek  $a, b, c$ , po prostu powołując się na (4). Nierówność Schwarza (4) jest z kolei, jak widzieliśmy, naturalną konsekwencją tego, że iloczyn skalarny czterowektorów ma dobry sens fizyczny.

Dla autora przedstawione powyżej odkrycie nierówności w prawach fizyki było wstrząsającym i jednocześnie bardzo radosnym przeżyciem. Może Czytelnik zna fizyczny dowód jakiejś innej klasycznej nierówności?