Superfícies Mínimas e Máximas

Aluno: *Reinaldo Resende de Oliveira**
Orientador: *Gláucio Terra*†

*resende@ime.usp.br
†glaucio.terra@gmail.com

Gláucio Terra

IME/USP - Depto. de Matemática

Reinaldo Resende Oliveira

São Paulo, 02 de agosto de 2016.

Sumário

1 Introdução

Esse trabalho tem como objetivo introduzir o aluno ao estudo das superfícies minímas no $\mathbb{R}^3$, visando atingir o conteúdo necessário para demonstração do Teorema de Bernstein com as ferramentes da Análise Complexa e no final exibirei uma dualidade entre o Teorema de Bernstein (relativo às superfícies minímas) e o Teorema de Calabi (o análogo ao teorema de Bernstein para superfícies máximas).
O Teorema de Bernstein é um dos teoremas básicos da teoria de superfícies minímas que basicamente faz o seguinte questionamento "*existem superfícies minímas no* $\mathbb{R}^n$ *que sejam gráfico de funções do* $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ *e não são planos?*", a resposta para esse questionamento foi dada ao longo do século XX:

- **Bernstein (1915-1917)** provou, o teorema posteriormente conhecido como Teorema de Berntein no $\mathbb{R}^3$, que se o gráfico de uma função do $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma superfície miníma, então tem que ser um plano;
- **De Giorgi (1965)** apresentou uma redução do problema que foi o ponto de partida para as próximas extensões do teorema e também estendeu o teorema para $n = 4$;
- **Almgren (1966)** estendeu o teorema para $n = 5$;
- **Simons (1968)** estendeu o teorema para $n = 6, 7, 8$;
- **Bombieri, De Giorgi e Giusti (1969)** mostraram que o Teorema de Bernstein não é válido para $n \geq 9$.

Em suma, se $n \leq 8$ todos os gráficos de funções ($\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$) que são superfícies minímas necessariamente são planos, por outro lado, se $n \geq 9$ existem gráficos de funções ($\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$) que são superfície minímas e não são planos.

2 Análise Complexa

Farei uma breve revisão sobre análise complexa no espaço $\mathbb{C}^n$ demonstrando alguns teoremas e resultados que serão utilizados no decorrer do texto e, no final dessa seção, relacionar esses conceitos com as funções harmônicas.

2.1 Funções Holomorfas

Usarei a notação $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ denotando $z_j = x_j + iy_j, 1 \leq j \leq n$, onde $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. Com isso, defina:

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)$$

Onde $\bar{z_j} = x_j - iy_j$, usarei também a seguinte notação: $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$

$$\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z) = \frac{\partial^{m_1} f}{\partial z_1^{m_1}} \cdots \frac{\partial^{m_n} f}{\partial z_n^{m_n}}(z)$$

Agora vou introduzir a noção de holomorfia no $\mathbb{C}^n$.

Definição 2.1. *Seja $D \subset \mathbb{C}^n$ aberto e $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua, dizemos que f é holomorfa em D se $\forall z \in D, \exists \frac{\partial f}{\partial z_j}$ e é finito, para cada $1 \leq j \leq n$. E denotaremos o conjunto de todas as funções holomorfas no aberto D como $\mathcal{H}(D)$.*

Enunciarei a seguinte proposição que segue diretamente da definição acima e da análise complexa no plano ($n = 1$).

Proposição 2.1. *Sejam $f, g \in \mathcal{H}(D)$, $D \subset \mathbb{C}^n$ aberto. Então:*
$\cdot f + g, fg \in \mathcal{H}(D)$;
$\cdot$ Se $g(z) \neq 0, \forall z \in D$, $\frac{f}{g} \in \mathcal{H}(D)$;
$\cdot$ Se f_n é uma sequência de funções holomorfas em D e converge uniformemente sobre compactos de D para $h : D \to \mathbb{C}$ contínua, então $h \in \mathcal{H}(D)$.

Note que foi definida holomorfia em abertos do $\mathbb{C}^n$, mas pode-se ampliar essa noção para conjuntos fechados da seguinte maneira: $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ contínua e $K \subset D$ fechado, dizemos que f é holomorfa em K, ou $f \in \mathcal{H}(K)$, se $\exists U \subset D, K \subset U$ tal que $f \in \mathcal{H}(U)$.
Contudo, caminharei agora para a demonstração do teorema da representação integral de Cauchy em várias variáveis complexas.

Definição 2.2. *O conjunto $\overline{D(a, r)} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| \leq r_j, 1 \leq j \leq n\}$ chama-se closed polydisc, onde $a \in \mathbb{C}^n, r \in \mathbb{R}^n$. É chamado de open polydisc o interior topológico desse conjunto.*

Note que a fronteira topológica de um polydisc é o seguinte conjunto:

$$\{z \in \mathbb{C}^n : \exists j \in \{1, ..., n\}, |z_j - a_j| = r_j\}$$

Vou introduzir a seguinte notação:

$$T(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : \forall j \in \{1, ..., n\}, |z_j - a_j| = r_j\}$$

Observe que esse conjunto é justamente a intersecção, em j percorrendo $\{1, ..., n\}$, das fronteiras topológicas do polydisc.
Vou introduzir mais algumas notações: $\frac{1}{w-z} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i - z_i}$ e $dw = dw_1...dw_n$.

Teorema 2.1. *Seja* $f \in \mathcal{H}\left(\overline{D(a,r)}\right)$. *Então* $\forall z \in \overline{D(a,r)}$, *tem-se:*

$$f(z) = \frac{\int_{T(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw}{(2i\pi)^n}$$

Demonstração. A ideia da demonstração é usar indução na dimensão do espaço. Para o caso $n = 1$ é o teorema da representação integral da Cauchy, suponha válida a fórmula para $n-1$, defina $g(u) = f(u, z_2, ..., z_n)$ holomorfa em $\overline{D(a_1, r_1)}$, pela fórmula de Cauchy em dimensão 1, aplicando para g, obtém-se: $\forall z_1 \in \overline{D(a_1, r_1)}$

$$g(z_1) = f(z_1, ..., z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{T(a_1,r_1)} \frac{f(w_1, z_2, ..., z_n)}{w_1 - z_1} dw_1$$

Com isso, fixe z_1 e use a hipótese de indução para a função holomorfa em $n-1$ variáveis $f(z_1, z_2, ..., z_n)$, segue que: $|z_j - a_j| \leq r_j, 2 \leq j \leq n$

$$f(z_1, z_2, ..., z_n) = \frac{1}{(2i\pi)^{n-1}} \int_{T(a_2,r_2)} ... \int_{T(a_n,r_n)} \frac{f(z_1, ..., w_n)}{(w_2 - z_2) ... (w_n - z_n)} dw_2...dw_n$$

Agora basta substituir a expressão de $g(z_1)$ e segue a fórmula. □

Vou enunciar e demonstrar alguns resultados que seguem do teorema acima, mas antes introduzirei algumas notações, tome $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$, defina:
$\cdot k + 1 = (k_1 + 1, ..., k_n + 1)$;
$\cdot (z-a)^k = \prod_{i=1}^{n} (z-a)^{k_i}$;
$\cdot f^{(k)}(z_0) = \frac{\partial^k f}{\partial z^k}$.
Lembrando que a última derivada parcial já foi definida no começo da seção, como consequência direta do teorema, temos que se f é holomorfa, então, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, a função $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ é holomorfa e:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{T(z_0,r)} \frac{f(w)\, k!}{(w - z_0)^{k+1}} dw$$

A seguir, enunciarei o teorema de Taylor, que segue como consequência do teorema da representação integral de Cauchy.

Teorema 2.2. *Se* $f \in \mathcal{H}\left(\overline{D(a,r)}\right)$, *então:*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{f^{(k)}(a)(z-a)^k}{k!}$$

Onde $k! = \prod_{i=1}^{n} k_i!$.

Demonstração. Note que, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, tem-se (é uma PG):

$$\frac{1}{w_j - z_j} = \sum_{k_j \geq 0} \frac{z_j^{k_j}}{w_j^{k_j+1}}$$

Então:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^n}\frac{z^k}{w^{k+1}}=\sum_{k_1\geq 0}\dots\sum_{k_n\geq 0}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{z_i^{k_i}}{w_i^{k_i+1}}\right)=\sum_{k_1\geq 0}\dots\sum_{k_{n-1}\geq 0}\left(\left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{z_i^{k_i}}{w_i^{k_i+1}}\right)\left(\sum_{k_n\geq 0}\frac{z_n^{k_n}}{w_n^{k_n+1}}\right)\right)$$

$$=\sum_{k_1\geq 0}\dots\sum_{k_{n-1}\geq 0}\left(\left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{z_i^{k_i}}{w_i^{k_i+1}}\right)\left(\frac{1}{w_n-z_n}\right)\right)$$

Fazendo o mesmo raciocínio "n vezes", tem-se:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^n}\frac{z^k}{w^{k+1}}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i-z_i}=\frac{1}{w-z}$$

Segue:

$$f(z)=\frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{T(a,r)}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{T(a,r)}f(w)\sum_{k\in\mathbb{N}^n}\frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}}dw$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{N}^n}\left(\frac{(z-a)^k}{k!\,(2i\pi)^n}\int_{T(a,r)}\frac{f(w)\,k!}{(w-a)^{k+1}}dw\right)=\sum_{k\in\mathbb{N}^n}\left(\frac{f^{(k)}(a)\,(z-a)^k}{k!}\right)$$

□

Outro resultado de extrema importância é o Princípio do Prolongamento Analítico que enunciarei a seguir, a priori, o nome 'analítico' ainda não é preciso, mas irei torná-lo preciso mais a frente.

Teorema 2.3. *Seja $D\subset\mathbb{C}^n$ aberto conexo e $f:D\to\mathbb{C}$ holomorfa em D, se $\exists U\subset D$ não vazio, tal que $f(U)=\{0\}$, então $f\equiv 0$*

Demonstração. Defina o conjunto $A=\left\{z\in D: f^{(k)}(z)=0,\forall k\in\mathbb{N}^n\right\}$, note que:

$$A=\bigcap_{k_1=0}^{\infty}\dots\bigcap_{k_n=0}^{\infty}\left(f^{(k)}\right)^{-1}(0)$$

Como cada $f^{(k)}$ é holomorfa, logo contínua, A é intersecção de uma família de fechados, portanto, A é fechado. Tem-se que, dado $w\in A$, $f^{(k)}(w)=0,\forall k\in\mathbb{N}^n$, segue do teorema anterior que existe uma vizinhança aberta V tal que $f(z)=0,\forall z\in V$, logo $V\subset A$, mostramos que todo ponto de A é ponto interior, portanto, A é aberto.
Concluímos que A é aberto e fechado, pela conexidade de D, $A=D$ ou A é vazio, mas, note que, $U\subset A$, logo $A=D$ □

Agora vou recordar o famoso teorema de Liouville e um corolário bastante útil.

Teorema 2.4. *Seja $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $|f(z)|\leq M,\forall z\in\mathbb{C}$, para algum $M>0$, então f é constante.*

Demonstração. Pelo teorema de Taylor, tem-se:

$$f(z)=\sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(0)\,z^k}{k!}$$

E sabemos que:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{T(0,r)} \frac{f(w)}{w^{k+1}}dw$$

Segue que:

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{T(0,r)} \frac{|f(w)|}{|w|^{k+1}}dw \leq \frac{M}{2\pi r^{k+1}}\int_{T(0,r)} dw = \frac{M}{r^k}$$

Como a função é holomorfa no plano complexo inteiro, podemos tomar r arbitrariamente grande, o que implica $|a_k| = 0 \Rightarrow a_k = 0, k \geq 1$. Portanto f é constante. $\square$

Corolário 2.1. *Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ não constante, então $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que a imagem da f não é densa em $\mathbb{C}$, logo: $\exists w \in \mathbb{C}, \epsilon > 0$ tal que $|f(z) - w| \geq \epsilon, \forall z \in \mathbb{C}$, com isso, fica bem definida no plano complexo inteiro e é holomorfa a seguinte função:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

Pela majoração feita na f, obtém-se:

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}$$

Pelo teorema anterior, g é constante, logo f é constante, absurdo. Concluímos que a imagem da f tem que ser densa em $\mathbb{C}$ $\square$

2.2 Funções Analíticas

Diz-se que uma função é analítica em $D \subset \mathbb{C}^n$ aberto se para cada $z_0 \in D, \exists V \subset D$ vizinhança de z_0 tal que $\forall z \in V$:

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} c_k (z - z_0)^k, c_k \in \mathbb{C}$$

Denota-se o conjunto de todas as funções analíticas no aberto D como $\mathcal{A}(D)$. Todo trabalho sobre funções analíticas já está feito, pois uma função ser analítica é equivalente a holomorfia da função, em outras palavras, seja $D \subset \mathbb{C}^n$ aberto, então $\mathcal{H}(D) = \mathcal{A}(D)$.

· **Toda função analítica é holomorfa**

Seja $f \in \mathcal{A}(D)$, então, para cada $z_0 \in D, \exists V \subset D$ vizinhança de z_0 tal que:

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} c_k (z - z_0)^k, c_k \in \mathbb{C}$$

Tome $k^{(j)} = (k_1, ..., k_{j-1}, k_{j+1}, ..., k_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$, ou seja, tire a j-ésima coordenada de k, defina $a_j = \sum_{k^{(j)} \in \mathbb{N}^{n-1}} c_k (z - z_0)^{k^{(j)}}$, tem-se:

$$f(z) = \sum_{k_j \geq 0} a_j \left(z_j - z_{0_j}\right)^{k_j}$$

Com a expressão acima, segue do caso de dimensão 1 que f será holomorfa em todo D.

· **Toda função holomorfa é analítica**

Segue diretamente da fórmula de Taylor já demonstrada.

Portanto, o estudo de funções analíticas já foi feito na seção anterior, pois nada mais é do que estudar as propriedades das funções holomorfas.

2.3 Equações de Cauchy-Riemann

Nesta seção irei mostrar algumas igualdades que serão usadas ao longo do texto, como, por exemplo, as famosas equações de Cauchy-Riemann.

Seja $f \in \mathcal{H}(D)$, $D \subset \mathbb{C}^n$ aberto, $1 \leq j \leq n$ e $z \in D$, tome $h \in \mathbb{R}$, escreva $z_j = x_j + iy_j$:

$$(I)\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_1, ..., z_j + h, ..., z_n) - f(z)}{h}$$

$$(II)\,\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_1, ..., z_j + ih, ..., z_n) - f(z)}{ih}$$

Como f é holomorfa, I e II tem que coincidir, lembrando que $\frac{1}{i} = -i$, tem-se:

$$(III)\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y_j}(z)$$

Escrevendo $f(z) = u(z) + iv(z)$ e usando III, tem-se, $\forall j \in \{1, ..., n\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(z) = \frac{\partial v}{\partial y_j}(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_j}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x_j}(z)$$

Que são conhecidas como as equações de Cauchy-Riemann. Tem-se que, diretamente de III:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = 0, \forall j \in \{1, ..., n\}$$

Uma outra igualdade que será usada adiante:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2}\right)$$

Com o mesmo raciocínio, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z_j}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z_j} \partial z_j}$$

2.4 Funções Harmônicas

Agora irei relacionar, dentro do que será utilizado adiante, o conceito de função harmônica e função holomorfa.

Definição 2.3. *Seja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$, diz-se que h é uma função harmônica se:*

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} \equiv 0$$

Proposição 2.2. *Seja $f \in \mathcal{H}(D), D \subset \mathbb{C}^n$ aberto, então $Im(f)$ e $Re(f)$ são funções harmônicas.*

Demonstração. Tome $v = Im(f), u = Re(f)$, escrevendo $z_j = x_j + iy_j$, tem-se:
$\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2} \right)$
Mas, tem-se, das equações de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial v}{\partial x_j} = -\frac{\partial u}{\partial y_j}$ e $\frac{\partial v}{\partial y_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Logo:

$$\Delta v \equiv 0$$

Analogamente para u □

Proposição 2.3. *Seja $f \in \mathcal{H}(D), D \subset \mathbb{C}^n$ aberto, então f é harmônica.*

Demonstração. Como f é holomorfa, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} \equiv 0$$

Segue que:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z_j}} \equiv 0$$

Como $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2} \right)$, concluímos que f é harmônica, □

Proposição 2.4. *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tem-se:*

$$\frac{\partial f}{\partial z} \in \mathcal{H}(D) \Leftrightarrow f \text{ é harmônica}$$

Demonstração. Segue direto da igualdade $\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$
Onde $z = x + iy$, lembrando que para funções de classe $C^2(D), D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, as equações de Cauchy-Riemann são equivalente à holomorfia da função. □

3 Superfícies Mínimas

Em geral, usarei que as parametrizações são de classe C^2, salvo menção explícita ao contrário.

3.1 Introdução às Superfície Minímas

Irei caminhar agora ao objetivo desse texto, que é demonstrar o Teorema de Bernstein. Antes irei fazer uma equivalência da noção de superfície mínima que definirei a seguir. Para estabelecer algumas notações.
Seja $x\left(u_1, u_2\right)$ uma parametrização de S superfície regular:
· Primeira forma fundamental:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle$$

· Segunda forma fundamental:

$$b_{ij} = \left\langle N, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle$$

Definição 3.1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ superfície regular. Dizemos que S é uma superfície mínima se sua curvatura média é identicamente nula, $H \equiv 0$.*

Sejam $x : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma parametrização da superfície regular S e $\Delta \subset D$ limitado, seja Σ a superfície definida por $x\left(\overline{\Delta}\right)$.
Seja N um vetor normal à S de classe C^1, então:

$$\left\langle N, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle = 0, i = 1, 2$$

Segue que:

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle = -\left\langle N, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_i} \right\rangle = -b_{ij}$$

Tome uma função qualquer de classe C^2, $f : \overline{\Delta} \to \mathbb{R}$, e um número real diferente de zero λ. Seja a superfície $\widetilde{S}_\lambda$ definida por, $(u_1, u_2) \in \overline{\Delta}$:

$$\widetilde{x}\left(u_1, u_2\right) = x\left(u_1, u_2\right) + \lambda f\left(u_1, u_2\right) N\left(u_1, u_2\right)$$

É chamada de variação normal de $x\left(\overline{\Delta}\right)$. Com algumas contas diretas das definições de primeira forma fundamental, obtém-se:

$$\widetilde{g_{ij}} = g_{ij} - 2\lambda f b_{ij} + \lambda^2 \phi_{ij}$$

Onde ϕ_{ij} é uma função contínua em D. Usando essa fórmula pode-se calcular o determinante da matriz da primeira forma fundamental:

$$\det\left(\widetilde{g_{ij}}\right) = \sum_{k=0}^{4} a_k \lambda^k$$

Sendo H a curvatura média de S:
· $a_0 = \det\left(g_{ij}\right)$;
· $a_1 = -2f\left(g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}\right) = -4fH\det\left(g_{ij}\right)$;
E a_2, a_3, a_4 são funções contínuas em D. Denote Σ_λ como a superfície definida por $\widetilde{x}\mid_\Delta$. Como a_0 é contínua em D, a_0 admite um mínimo em $\overline{\Delta}$, pois $\overline{\Delta}$ é compacto, como a superfície S é

regular, temos que o mínimo de a_0 é estritamente positivo. Olhando para $\det(\widetilde{g_{ij}})$ como uma função de λ, por continuidade, tem-se:

$$\exists\epsilon > 0, \det(\widetilde{g_{ij}}) > 0$$

Sempre que $|\lambda| < \epsilon$. Como conclusão, sempre que $|\lambda| < \epsilon$, a superfície Σ_λ será regular. Temos que, $u = (u_1, u_2) \in D$:

$$A(\lambda) \doteq A(\Sigma_\lambda) = \int_\Delta \sqrt{\det(\widetilde{g_{ij}})}du = \int_\Delta \sqrt{\det(g_{ij})(1 - 4fH + R)}du$$

Onde $R = \frac{a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4}{\det(g_{ij})}$, derivando em relação a λ, obtém-se:

$$A'(\lambda) = \int_\Delta \frac{\sqrt{\det(g_{ij})}(-4fH + R')}{2\sqrt{1 - 4fH + R}}du$$

Calculando em $\lambda = 0$:

$$(I) \;\; A'(0) = -2\int_\Delta \sqrt{\det(g_{ij})}fHdu$$

Contudo, pode-se enunciar a equivalência citada anteriormente:

Teorema 3.1. *Seja S uma superfície regular e uma parametrização $x : D \to S$. São equivalentes:*
- *S é mínima;*
- *$\forall\Delta \subset D$ limitado e para toda variação normal de $x(\Delta)$, tem-se $A'(0) = 0$.*

Demonstração. Suponha que S é uma superfície mínima, então $H \equiv 0$ e, por (I), a afirmação está demonstrada. Reciprocamente, suponha que $\exists q \in D, H(q) \neq 0$, pode-se supor $H(q) > 0$ sem perda de generalidade, seja Δ vizinhança limitada de q tal que $H(\Delta) > 0$, existe por continuidade, escolha $f : \overline{\Delta} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $f(\Delta) > 0$ e identicamente nula fora de Δ. Contudo, $A'(0) < 0$ para a variação normal determinada por f, o que contradiz a hipótese, segue $H \equiv 0$, portanto S é mínima. □

3.2 Superfícies não-paramétricas

Seja S uma superfície regular e $x : D \to S$ uma parametrização. Dizemos que a superfície é não-paramétrica ou está na forma não-paramétrica se $\exists i, j \in \{1, ..., n\}$ tal que:

$$x_i(u_1, u_2) = u_1 \text{ e } x_j(u_1, u_2) = u_2$$

Sem perda de generalidade, quando a superfície for não-paramétrica, podemos supor $i = 1, j = 2$.

Proposição 3.1. *Seja $x : D \to S$ uma parametrização da superfície S e $a \in D$ um ponto regular de S. Então $\exists\Delta \subset D$ vizinhança de a tal que a superfície $\Sigma = x(\Delta)$ admite uma reparametrização na forma não-paramétrica.*

Demonstração. Seja π_{ij} a projeção canônica nas coordenadas i, j tais que a matriz jacobiana em a de $\pi_{ij} \circ x$ seja diferente de zero, essas coordenadas existem pelo fato de a ser ponto regular de S. Pelo teorema da função inversa, $\exists\Delta \subset D$ vizinhança de a tal que $\pi_{ij} \circ x$ é um difeomorfismo. Então $x \circ (\pi_{ij} \circ x)|_\Delta$ é uma parametrização na forma não-paramétrica de Σ. □

Note que, quando uma superfície S com parametrização $x : D \to S$ está na forma não paramétrica, então ela é regular, pois $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}$ são linearmente independentes.

Lema 3.1. *Sejam S superfície não-paramétrica definida por $x : D \to S$ e $N_3, ..., N_n : D \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1. Então $\exists! N_1, N_2 : D \to \mathbb{R}$ tal que $(N_1, ..., N_n) \in (T_pS)^{\perp}$.*

Demonstração. Note que $(N_1, ..., N_n) \in (T_pS)^{\perp} \Leftrightarrow \left\langle (N_1, ..., N_n), \frac{\partial x}{\partial u_i} \right\rangle = 0, i = 1, 2$. Mas, tem-se que:

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = \left(1, 0, \frac{\partial x_3}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial x_n}{\partial u_1}\right) \text{ e } \frac{\partial x}{\partial u_2} = \left(0, 1, \frac{\partial x_3}{\partial u_2}, ..., \frac{\partial x_n}{\partial u_2}\right)$$

Basta tomar:

$$N_1 = -\sum_{j=3}^{n} N_j \frac{\partial x_j}{\partial u_1} \text{ e } N_2 = -\sum_{j=3}^{n} N_j \frac{\partial x_j}{\partial u_2}$$

□

Lema 3.2. *Seja S uma superfície com parametrização $x : D \to S$ e $a \in D$ ponto regular de S e $N \in \left(T_{x(a)}S\right)^{\perp}$. Então $\exists \Delta \in a$ e $n : \Delta \to (T_pS)^{\perp}$ tal que $n(a) = N$.*

Demonstração. Consequência direta dos dois últimos resultados. □

Seja S uma superfície não-paramétrica com parametrização $x : D \to S$, denote $x_i = f_i, i \geq 3$ e $N_1, ..., N_n : D \to \mathbb{R}$ funções C^1, tem-se:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_j \partial u_i} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f_3}{\partial u_i \partial u_j}, ..., \frac{\partial^2 f_n}{\partial u_i \partial u_j}\right)$$

Segue que:

$$b_{11} = \sum_{k=3}^{n} N_k \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}$$

$$b_{12} = b_{21} = \sum_{k=3}^{n} N_k \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2}$$

$$b_{22} = \sum_{k=3}^{n} N_k \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}$$

Seja $N = (N_1, ..., N_n)$ o vetor normal dado pelo lema 2.1, lembrando que:

$$H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{2\det(g_{ij})}$$

Suponha que S é uma superfície mínima, então $H \equiv 0$, logo $g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} \equiv 0$, substituindo as expressões para os b_{ij}, g_{ij} obtém-se:

$$\left(1+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\right)^2\right)\sum_{m=3}^{n} N_m \frac{\partial^2 f_m}{\partial u_2^2}+\left(1+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial u_2}\right)^2\right)\sum_{m=3}^{n} N_m \frac{\partial^2 f_m}{\partial u_1^2}-2\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\frac{\partial f_k}{\partial u_2}\right)\left(\sum_{m=3}^{n} N_m \frac{\partial^2 f_m}{\partial u_1 \partial u_2}\right)=0$$

Rearranjando adequadamente, obtém-se:

$$\sum_{m=3}^{n}\left(\left(1+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f_m}{\partial u_2^2}+\left(1+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial u_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f_m}{\partial u_1^2}-2\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\frac{\partial f_k}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 f_m}{\partial u_1 \partial u_2}\right)N_m = 0$$

Mas, as funções $N_i, i \geq 3$ foram tomadas arbitrariamente, portanto, pode-se tomar todas identicamente nulas com exceção de um índice e concluir que, $\forall m \geq 3$:

$$\left(1+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f_m}{\partial u_2^2}+\left(1+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial u_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f_m}{\partial u_1^2}-2\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\frac{\partial f_k}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 f_m}{\partial u_1 \partial u_2}=0$$

Usando as seguintes notações: $\frac{\partial^2 f_m}{\partial u_1^2}=\partial_1^2 f_m$, $\frac{\partial^2 f_m}{\partial u_2^2}=\partial_2^2 f_m$, $\frac{\partial^2 f_m}{\partial u_1 \partial u_2}=\partial_{12}^2 f_m$ e $f=(f_3,\ldots,f_n)$, obtém-se:

$$\left(1+\left|\frac{\partial f}{\partial u_2}\right|^2\right)\partial_1^2 f+\left(1+\left|\frac{\partial f}{\partial u_1}\right|^2\right)\partial_2^2 f-2\left\langle\frac{\partial f}{\partial u_1},\frac{\partial f}{\partial u_2}\right\rangle\partial_{12}^2 f\equiv 0$$

A equação acima é conhecida como **a equação das superfícies mínimas não-paramétricas**.

Proposição 3.2. *Toda superfície mínima regular gera uma solução local para a equação acima.*

Demonstração. Pela proposição 2.1, a superfície é localmente não-paramétrica, como ela é mínima satisfaz a equação acima. □

Exemplo 3.1. *Seja $z=u_1+iu_2$ e $g_3(z),\ldots,g_m(z)$, com $2m+2=n$, funções analíticas. Então S definida por:*

$$x(u_1,u_2)=(u_1,u_2,Re(g_3(z)),Im(g_3(z)),\ldots,Re(g_n(z)),Im(g_n(z)))$$

É uma superfície mínima não-paramétrica. Com efeito, com a notação anterior, $p\in\{1,\ldots,m\}$:

$$f_k(u_1,u_2)=\begin{cases}Re(g_p(z)), k=2p+1\\ Im(g_p(z)), k=2p+2\end{cases}$$

Como cada g_p é analítica, vale as equações de Cauchy-Riemann, então:

$$\frac{\partial Re(g_p)}{\partial u_1}=\frac{\partial Im(g_p)}{\partial u_2}$$

$$\frac{\partial Re(g_p)}{\partial u_2}=-\frac{\partial Im(g_p)}{\partial u_1}$$

Derivando novamente cada expressão, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 Re(g_p)}{\partial u_1^2}=-\frac{\partial^2 Re(g_p)}{\partial u_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 Im(g_p)}{\partial u_1^2}=-\frac{\partial^2 Im(g_p)}{\partial u_2^2}$$

Com isso, tem-se $(*)\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}=-\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}$, *note que:*

$$(**)\left\langle\frac{\partial f}{\partial u_1},\frac{\partial f}{\partial u_2}\right\rangle=\left\langle\left(\frac{\partial Re(g_1)}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial Im(g_n)}{\partial u_1}\right),\left(-\frac{\partial Im(g_1)}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial Re(g_n)}{\partial u_1}\right)\right\rangle=0$$

Com raciocínio análogo, obtém-se:

$$(***)\left|\frac{\partial f}{\partial u_1}\right|^2=\left|\frac{\partial f}{\partial u_2}\right|^2$$

Concluí-se, de $(*)$, $(**)$ e $(***)$, que S é, de fato, uma superfície mínima, pois é não-paramétrica e satisfaz a equação das superfícies mínimas não-paramétricas.

Irei introduzir novas notações e alguns cálculos que serão utilizadas em todo resto desse capítulo. Seja S uma superfície na forma não-paramétrica e $x : D \to S$ tal que:

$$x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f_3(u_1, u_2), \ldots, f_n(u_1, u_2))$$

Seja $f = (f_1, \ldots, f_n)$, sejam:

$$p = \tfrac{\partial f}{\partial u_1} \quad q = \tfrac{\partial f}{\partial u_2}$$

$$r = \tfrac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} \quad t = \tfrac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}$$

Com as notações acima, a equação das superfícies mínimas não-paramétricas pode ser escrita como:

$$\left(1 + |q|^2\right) r + \left(1 + |p|^2\right) t - 2\langle p, q\rangle s = 0$$

Já os coeficientes da primeira forma fundamental:

$$g_{11} = 1 + |p|^2 \quad g_{22} = 1 + |q|^2 \quad g_{12} = \langle p, q\rangle$$

Tem-se também:

$$\det(g_{ij}) = 1 + |p|^2 + |q|^2 + |q|^2 |q|^2 - \langle p, q\rangle^2$$

Denote $W = \sqrt{\det(g_{ij})}$. Agora farei uma variação, com a mesma ideia já apresentada neste capítulo, na superfície S, seja $\Delta \subset D$ limitado, tome:

$$\widetilde{f}(u_1, u_2) = f(u_1, u_2) + \lambda h(u_1, u_2)$$

Onde $\lambda \in \mathbb{R}, h_i : \Delta \to \mathbb{R}$ de classe $C^1, 3 \leq i \leq n$ e $h = (h_2, \ldots, h_n)$. Usando as mesmas notações usadas para superfície S, tem-se que:

$$\widetilde{p} = p + \lambda \tfrac{\partial h}{\partial u_1} \quad \widetilde{q} = q + \lambda \tfrac{\partial h}{\partial u_2}$$

Logo $\widetilde{W}^2 = W^2 + 2\lambda X + \lambda^2 Y$, onde Y é uma função de classe C^0 e:

$$X = \frac{\partial h}{\partial u_1}\left(\left(1 + |q|^2\right) p - \langle p, q\rangle q\right) + \frac{\partial h}{\partial u_2}\left(\left(1 + |p|^2\right) q - \langle p, q\rangle p\right)$$

Lembrando da fórmula de Taylor e usando-a para $\sqrt{x}$ e x_0, tem-se:

$$\sqrt{x} = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x - x_0) + R_{x,x_0}$$

Aplicando o resultado acima em $x = \widetilde{W}^2, x_0 = W^2$, lembrando que toda superfície na forma não-paramétrica é regular, portanto $W > 0$, obtém-se:

$$\widetilde{W} = W + \lambda \frac{X}{W} + \lambda^2 R$$

Onde R é uma função contínua. Suponha agora que S é **mínima**, então, seja $u = (u_1, u_2)$, segue:

$$\int_\Delta \widetilde{W} du \geq \int_\Delta W du$$

Sabemos que $\lambda = 0$ é ponto de mínimo da área, com isso, derivando a parcela da esquerda e calculando em $\lambda = 0$ obtém-se:

$$\int_\Delta \frac{X}{W} du = 0$$

Usando a expressão de X citada acima e integrando por partes, lembrando também que a função h foi escolhida arbitrariamente, tem-se:

$$\frac{\partial \left(\frac{1+|q|^2}{W} p - \frac{\langle p,q \rangle}{W} q \right)}{\partial u_1} + \frac{\partial \left(\frac{1+|p|^2}{W} q - \frac{\langle p,q \rangle}{W} p \right)}{\partial u_2} = 0$$

Abrindo as derivadas parciais acima, obtém-se:

$$\frac{1}{W} \overbrace{\left(\left(1 + |q|^2\right) r + \left(1 + |p|^2\right) t - 2 \langle p, q \rangle s \right)}^{*} +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{u_1} \left(\frac{1 + |q|^2}{W} \right) - \frac{\partial}{u_2} \left(\frac{\langle p, q \rangle}{W} \right) \right) p +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{u_2} \left(\frac{1 + |p|^2}{W} \right) - \frac{\partial}{u_1} \left(\frac{\langle p, q \rangle}{W} \right) \right) q = 0$$

Onde * é a equação das superfícies mínimas não-paramétricas, como S a satisfaz, tem-se:

$$\left(\frac{\partial}{u_1} \left(\frac{1 + |q|^2}{W} \right) - \frac{\partial}{u_2} \left(\frac{\langle p, q \rangle}{W} \right) \right) p + \left(\frac{\partial}{u_2} \left(\frac{1 + |p|^2}{W} \right) - \frac{\partial}{u_1} \left(\frac{\langle p, q \rangle}{W} \right) \right) q = 0$$

Abrindo o coeficiente de p, obtém-se que:

$$\frac{\partial}{u_1} \left(\frac{1 + |q|^2}{W} \right) - \frac{\partial}{u_2} \left(\frac{\langle p, q \rangle}{W} \right) = \frac{1}{W^3} \left(\langle p, q \rangle q - \left(1 + |q|^2\right) p \right) \overbrace{\left(\left(1 + |q|^2\right) r + \left(1 + |p|^2\right) t - 2 \langle p, q \rangle s \right)}^{*} = 0$$

Onde * é, novamente, a equação da superfícies minímas, concluí-se, também, que:

$$\frac{\partial}{u_2} \left(\frac{1 + |p|^2}{W} \right) - \frac{\partial}{u_1} \left(\frac{\langle p, q \rangle}{W} \right) = 0$$

Donde segue:

$$\bigstar \frac{\partial}{u_1} \left(\frac{1 + |q|^2}{W} \right) = \frac{\partial}{u_2} \left(\frac{\langle p, q \rangle}{W} \right)$$
$$\bigstar \frac{\partial}{u_2} \left(\frac{1 + |p|^2}{W} \right) = \frac{\partial}{u_1} \left(\frac{\langle p, q \rangle}{W} \right)$$

Então, toda superfície mínimas na forma não-paramétrica satisfaz as equações $\star$.

3.3 Parâmetros isotérmicos

Diz-se que (u_1, u_2) são parâmetros isotérmicos se acontecer o seguinte:

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}, \lambda(u_1, u_2) > 0$$

Onde δ é o Delta de Kronecker. Seja S uma superfície definida por $x(u_1, u_2) \in C^2$ e (u_1, u_2) parâmetros isotérmicos, então:

$$H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} = \frac{\lambda^2(b_{11} + b_{22})}{2\lambda^4} = \frac{b_{11} + b_{22}}{\lambda^2}$$

Denotando $\Delta x(u_1, u_2) = (\Delta x_1(u_1, u_2), ..., \Delta x_n(u_1, u_2))$, pode-se enunciar:

Proposição 3.3. *Seja S uma superfície regular com parametrização $x : D \to S$ e (u_1, u_2) parâmetros isotérmicos. Então:*

$$\Delta x = 2\lambda^2 H$$

Onde H é o vetor curvatura média.

Demonstração. Sabemos que:

1 $g_{11} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = \lambda^2 = g_{22} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle$

2 $g_{12} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle = 0$

Derivando as expressões acima, (1) com relação a u_1 e (2) com relação a u_2, obtém-se:

1.1 $\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle$

2.1 $\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} \right\rangle$

Logo:

$$\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} \right\rangle$$

$$\left\langle \Delta x, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = 0$$

Analogamente, derivando as expressões acima, (1) com relação a u_2 e (2) com relação a u_1, obtém-se:

$$\left\langle \Delta x, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle = 0$$

Tome $N(u_1, u_2)$ vetor normal, pelas equações obtidas Δx é paralelo à N, tem-se:

$$\langle \Delta x, N \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 2}{\partial x \partial u_1} 2, N \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 2}{\partial x \partial u_2} 2, N \right\rangle = b_{11} + b_{22} = 2\lambda^2 H(N)$$

Como o N foi tomado arbitrariamente, tem-se:

$$\Delta x = 2\lambda^2 H$$

$\square$

Com isso, pode-se dar uma caracterização das superfície minímas com parâmetros isotérmicos, segue:

Corolário 3.1. *Seja S uma superfície regular com parâmetros isotérmicos (u_1, u_2) e parametrização $x : D \to S$, então:*

$$S \, \textit{é miníma} \Leftrightarrow x_k \, \textit{é harmônica}, k \in \{1, \ldots, n\}$$

Demonstração. Segue diretamente da proposição anterior, já que $\Delta x = 2\lambda^2 H$ e $\lambda(u_1, u_2) > 0$ □

Usando a notação complexa $z = u_1 + iu_2$, $1 \geq k \geq n$:

$$\psi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i\frac{\partial x_k}{\partial u_2}$$

Obtém-se, por algumas contas diretas, as duas equações:

$$\star \ \sum_{k=1}^{n} (\psi_k)^2 = g_{11} - g_{22} - 2ig_{12}$$

$$\star\star \ \sum_{k=1}^{n} |\psi_k| = g_{11} + g_{22}$$

Com isso, tem-se:

$$\psi_k \, \textit{é analítica em} \, z \Leftrightarrow x_k \, \textit{é hamônica em} \, (u_1, u_2)$$

Segue diretamente das equação de Cauchy-Riemann, de $\star\star$, tem-se:

$$(u_1, u_2) \, \textit{são parâmetros isotérmicos} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (\psi_k)^2 = 0$$

Finalmente, também tem-se que, se (u_1, u_2) são parâmetros isotérmicos, então:

$$\sum_{k=1}^{n} |\psi_k|^2 \neq 0 \Leftrightarrow S \, \textit{é regular}$$

Agora, irei fazer uma caracterização de superfícies minímas regulares, mostrarei que estudar tais superfícies é o mesmo que estudar funções analíticas, vou separar em duas proposições, seguem:

Proposição 3.4. *Seja $x : D \to S$ uma parametrização da superfície regular miníma S com parâmetros isotérmicos, então:*

1. *ψ_k é analítica, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$;*
2. *$\sum_{k=1}^{n} (\psi_k)^2 = 0$;*
3. *$\sum_{k=1}^{n} |\psi_k|^2 \neq 0$.*

Demonstração. Segue direto da proposição 2.3 e dos comentários feitos acima □

Reciprocamente, tem-se:

Proposição 3.5. *Dadas* $\{\phi_j(z)\}_{j=1}^n$ *família finita de funções analíticas num simplesmente conexo* $D \subset \mathbb{C}$*, então existe* S *superfície regular miníma definida por* $x : D \to S$ *tal que* $\phi_j = \frac{\partial x_j}{\partial z}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$

Demonstração. Como D é simplesmente conexo, pode-se tomar $\Psi_j = \int \phi_j(\zeta)\, d\zeta$, escreva $\Psi_j = a_j + ib_j$, segue das equações de Cauchy-Riemann que:

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial z} = \frac{\partial \Psi_j}{\partial u_1} - i\frac{\partial \Psi_j}{\partial u_2} = \frac{\partial a_j}{\partial u_1} + i\frac{\partial b_j}{\partial u_1}$$

Então, segue que:

$$\frac{\partial a_j}{\partial u_1} - i\frac{\partial a_j}{\partial u_2} = \frac{\partial a_j}{\partial u_1} + i\frac{\partial b_j}{\partial u_1} = \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} = \phi_j$$

Tome $x_j = a_j$, segue dos comentários acima que $x : D \to \mathbb{R}^n$ define uma superfície miníma. □

Agora mostrarei um teorema muito importante nessa teoria, o **teorema de existência de parâmetros isotérmicos para superfícies minímas**, segue:

Teorema 3.2. *Seja* S *uma superfície miníma. Todo ponto regular de* S *admite uma vizinhança tal que existe uma reparametrização de* S *em parâmetros isotérmicos.*

Demonstração. Seja $a \in S$ ponto regular, pela proposição 2.1, existe uma vizinhança de a tal que S está na forma não-paramétrica, em particular, $\exists r > 0$ tal que S está na forma não-paramétrica em $B_r = \{(u_1, u_2) : |a - u| < r\}$ então as equações $\bigstar$ são válidas para S, lembrando as equações:

$$\bigstar \frac{\partial}{u_1}\left(\frac{1 + |q|^2}{W}\right) = \frac{\partial}{u_2}\left(\frac{\langle p, q\rangle}{W}\right)$$

$$\bigstar \frac{\partial}{u_2}\left(\frac{1 + |p|^2}{W}\right) = \frac{\partial}{u_1}\left(\frac{\langle p, q\rangle}{W}\right)$$

Nas notações já estabelecidas para p, q, W, defina $F, G : B_r \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{1 + |p|^2}{W}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u_2} = \frac{1 + |q|^2}{W}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u_1} = \frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{\langle p, q\rangle}{W}$$

Defina $T(u_1, u_2) = (u_1, u_2) + (F(u_1, u_2), G(u_1, u_2))$, sendo J a matriz jacobiana, tem-se:

$$J_{(u_1,u_2)}(T) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+|p|^2}{W} & \frac{\langle p,q\rangle}{W} \\ \frac{\langle p,q\rangle}{W} & 1 + \frac{1+|q|^2}{W} \end{pmatrix}$$

Com cálculos diretos, obtém-se:

$$\det\left(J_{(u_1,u_2)}(T)\right) = 2 + \frac{2 + |p|^2 + |q|^2}{W} > 0$$

Localmente T é um difeomorfismo, pelo teorema da função inversa, tem-se:

$$J_{T(u_1,u_2)}\left(T^{-1}\right)=\frac{1}{\det\left(J_{(u_1,u_2)}\left(T\right)\right)}\begin{pmatrix}1+\frac{1+|q|^2}{W} & -\frac{\langle p,q\rangle}{W}\\ -\frac{\langle p,q\rangle}{W} & 1+\frac{1+|p|^2}{W}\end{pmatrix}$$

Pra simplificar a notação, tome $C=\frac{1}{W\det\left(J_{(u_1,u_2)}(T)\right)}$, então:

$$J_{T(u_1,u_2)}\left(T^{-1}\right)=C\begin{pmatrix}W+1+|q|^2 & -\langle p,q\rangle\\ -\langle p,q\rangle & W+1+|p|^2\end{pmatrix}$$

Pela regra da cadeira para a composição $x\circ T^{-1}$, tem-se:

$$J_{T(u_1,u_2)}\left(x\circ T^{-1}\right)=J_{(u_1,u_2)}\left(x\right)J_{T(u_1,u_2)}\left(T^{-1}\right)=C\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2}\\ . & .\\ . & .\\ . & .\\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W+1+|q|^2 & -\langle p,q\rangle\\ -\langle p,q\rangle & W+1+|p|^2\end{pmatrix}=$$

$$=C\begin{pmatrix}1+W+|q|^2 & -\langle p,q\rangle\\ -\langle p,q\rangle & 1+W+|q|^2\\ \left(1+W+|q|^2\right)\frac{\partial f_3}{\partial u_1}-\langle p,q\rangle\frac{\partial f_3}{\partial u_2} & \left(1+W+|p|^2\right)\frac{\partial f_3}{\partial u_2}-\langle p,q\rangle\frac{\partial f_3}{\partial u_1}\\ . & .\\ . & .\\ . & .\\ \left(1+W+|q|^2\right)\frac{\partial f_n}{\partial u_1}-\langle p,q\rangle\frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \left(1+W+|p|^2\right)\frac{\partial f_n}{\partial u_2}-\langle p,q\rangle\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\end{pmatrix}$$

Denote $(u_1',u_2')=T\left(u_1,u_2\right)$ e $\widetilde{x}=x\circ T^{-1}$, vou mostrar que $\widetilde{x}\left(u_1',u_2'\right)$ é tal que (u_1',u_2') são parâmetros isotérmicos, segue (irei mostrar que $\widetilde{g}_{12}=0$, as outras igualdades são análogas) das derivadas parciais dadas na matriz Jacobiana:

$$\left\langle\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial u_1'},\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial u_2'}\right\rangle=-C^2\left\langle p,q\right\rangle\left(-W^2+\left(|p|^2+1\right)\left(|q|^2+1\right)-\langle p,q\rangle^2\right)=$$

$$=-C^2\left\langle p,q\right\rangle\left(-\det\left(g_{ij}\right)+\left|\frac{\partial x}{\partial u_1}\right|^2\left|\frac{\partial x}{\partial u_2}\right|^2-\left\langle\frac{\partial x}{\partial u_1},\frac{\partial x}{\partial u_2}\right\rangle\right)=$$

$$=-C^2\left\langle p,q\right\rangle\left(-\det\left(g_{ij}\right)+\det\left(g_{ij}\right)\right)=0$$

Assim, está concluído o teorema. □

Diz-se que $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é uma aplicação conforme se é um difeomorfismo sobre $f\left(D\right)$ e preserva ângulos. Isso é equivalente a dizer que:

$$J\left(f\right)=a\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Com $a>0$, ou seja, f é conforme se, e somente se, sua matriz Jacobiana é uma matriz de rotação multiplicada por uma constante positiva, se essa constante é negativa, diz-se que f é anti conforme. Com isso, f ser conforme também é equivalente a ser um homeomorfismo e analítica. Contudo, pode-se enunciar o seguinte:

Lema 3.3. *Seja S uma superfície e $x : D \to S$ nos parâmetros isotérmicos (u_1, u_2) e $f : D \to f(D)$ um difeomorfismo. Então:*

$$f(u_1, u_2) \text{ são parâmetros isotérmicos} \Leftrightarrow f \text{ é conforme ou anti conforme}$$

Demonstração. Seja I a matriz identidade de $M_2(\mathbb{R})$, então $(g_{ij}) = \lambda^2 I$, denotando por $\widetilde{g_{ij}}$ a primeira forma fundamental com relação aos parâmetros $f(u_1, u_2)$, tem-se $(\widetilde{g_{ij}}) = \lambda^2 (J(f))^t J(f)$ (segue da regra da cadeia), logo:

$$f(u_1, u_2) \text{ é paramâmetro isotérmico} \Leftrightarrow \widetilde{g_{ij}} = \widetilde{\lambda}^2 \delta_{ij} \Leftrightarrow \lambda^2 (J(f))^t J(f) = \widetilde{\lambda}^2 I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda}{\widetilde{\lambda}} J(f) \text{ é uma matriz ortogonal} \Leftrightarrow f \text{ é conforme}$$

A última equivalência segue da equivalência dada acima para aplicações conformes. □

3.4 Teorema de Bernstein

Irei construir alguns lemas bem técnicos para auxiliar na demonstração do Teorema de Bernstein.

Lema 3.4. *Dada $E(u_1, u_2) \in C^2$ definida em D e seja $H_{(u_1,u_2)}(E)$ a matriz hessiana. Suponha que a matriz hessiana é positiva definida, então $\forall x, y \in D, \nabla E(x) = u, \nabla E(y) = v$, tem-se:*

$$\langle x - y, u - v \rangle > 0$$

Demonstração. Defina $G(t) = D(ty + (1-t)x)$, logo:

$$G'(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial E}{\partial u_i}(ty + (1-t)x)(y_i - x_i)$$

$$G''(t) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_i \partial u_j}(ty + (1-t)x)(y_i - x_i)(y_j - x_j) =$$

$$\begin{pmatrix} y_1 - x_1 & y_2 - x_2 \end{pmatrix} H_{ty+(1-t)x}(E) \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix} > 0$$

A desigualdade segue de que a matriz hessiana é positiva definida, logo G é estritamente crescente, tem-se $G'(1) > G'(0)$, calculando esses valores, obtém-se $\sum_{i=1}^{2} v_i (y_1 - x_i) > \sum_{i=1}^{2} u_i (y_1 - x_i)$, logo:

$$\langle x - y, u - v \rangle > 0$$

□

Lema 3.5. *Nas hipóteses da lema anterior, defina $T(u_1, u_2) = (u_1, u_2) + \nabla E(u_1, u_2)$, $T(x) = \eta, T(y) = \theta$, então:*

$$|y - x| < |\theta - \eta|$$

Demonstração. Tem-se que $\theta - \eta = T(y) - T(x) = (y - x) + (v - u)$, pelo lema anterior, $\langle v - u, y - x \rangle > 0 \Rightarrow \langle y - x, y - x \rangle + \langle v - u, y - x \rangle > \langle y - x, y - x \rangle \Rightarrow \langle \theta - \eta, y - x \rangle > |y - x|^2$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\langle \theta - \eta, y - x \rangle \leq |y - x| |\theta - \eta|$, segue:

$$|y - x| < |\theta - \eta|$$

□

Como consequência direta do lema anterior T é injetora, pois: $T(p) = T(w) \Rightarrow |p - w| = 0 \Rightarrow p = w$.

Lema 3.6. *Nas condições do lema anterior, tome* $D = \left\{u = (u_1, u_2) : |u|^2 < R^2\right\}$*, então* $T : D \to T(D)$ *é um difeomorfismo e* $B = \left\{T(u_1, u_2) : |T(u_1, u_2) - T(0)|^2 < R^2\right\} \subset T(D)$

Demonstração. Como $E \in C^2$, então $T \in C^1$, então seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to D$ uma curva regular qualquer, então $T \circ \alpha \in C^1$ e $(T \circ \alpha)'(t) = J_{\alpha(t)} T(\alpha'(t))$, mas, pela definição de T, segue que $J(T) = J(id + \nabla E) = Id + H(E)$ onde id, Id e $H(E)$ são a função identidade, a matriz identidade e a hessiana de E, respectivamente. Logo:

$$(T \circ \alpha)'(t) = J_{\alpha(t)} T(\alpha'(t)) = Id_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) + H_{\alpha(t)}(E)(\alpha'(t)) = \alpha'(t) + H_{\alpha(t)}(E)(\alpha'(t))$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se:

$$|\alpha'(t)| \left|(T \circ \alpha)'(t)\right| \geq \left\langle (T \circ \alpha)'(t), \alpha'(t)\right\rangle = \left\langle \alpha'(t) + H_{\alpha(t)}(E)(\alpha'(t)), \alpha'(t)\right\rangle =$$

$$= |\alpha'(t)| \left\langle H_{\alpha(t)}(E)(\alpha'(t)), \alpha'(t)\right\rangle \Rightarrow \left|(T \circ \alpha)'(t)\right| \geq \left\langle H_{\alpha(t)}(E)(\alpha'(t)), \alpha'(t)\right\rangle > 0$$

A última desigualdade é dada porque a matriz hessiana de E é positiva definida, por hipótese. Portanto $T \circ \alpha$ é um difeomorfismo, como a curva foi escolhida com imagem em D arbitrariamente, segue que T é um difeomorfismo em D (com esse argumento conseguimos um difeomorfismo local, mas, antes do lema, foi mostrado que T é injetora, logo é um difeomorfismo em D). Agora vou mostrar a segunda tese desse lema, mas se $T(D) = \mathbb{R}^2$ a tese é trivial, então suponha $T(D) \neq \mathbb{R}^2$, tome $\eta \in T(D)^c \left(= \mathbb{R}^2 - T(D)\right)$ tal que η minimize a distância à $T(0)$ (esse η existe, pois $\exists p > 0$ tal que $B(T(0), p)$ contém algum ponto de $T(D)^c$, logo, como T é difeomorfismo, tem-se $\overline{B(T(0), p)} \cap T(D)^c$ é compacto, logo, existe tal ponto que minimiza distância). Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = \theta$ (essa sequência existe, pois se não existisse $\exists B$ bola aberta contida em $T(D)^c$ e $\eta \in B$, então η não minimizaria distância), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não pode ter ponto de acumulação em D (se tivesse, seguiria que $\theta \in T(D)$, por continuidade), logo $\lim_{n\to\infty} |x_n| = R$, pelo lema anterior:

$$|T(x_n) - T(0)| > |x_n| \Rightarrow |\theta - T(0)| \geq R$$

Logo $\theta \in B^c$, como θ minimiza a distância, dado $h \in T(D)^c$ tem-se $|h - T(0)| \geq |\theta - T(0)| \geq R \Rightarrow h \in B^c$, então $T(D)^c \subset B^c$, segue $B \subset T(D)$. □

Lema 3.7. *Na notação estabelecida para superfícies não-paramétricas, se* $f(u_1, u_2)$ *é uma solução da equação das superfícies minímas não-paramétricas em* D*, seja* $\bar{T}(u_1, u_2) = (u_1, u_2) + (F(u_1, u_2), G(u_1, u_2))$*, onde* F, G *definidas como no Teorema 2.2. Então* $\bar{T} : D \to \bar{T}(D)$ *é um difeomorfismo como* $B = \left\{T(u_1, u_2) : |T(u_1, u_2) - T(0)|^2 < R^2\right\} \subset \bar{T}(D)$

Demonstração. Tome $E : D \to \mathbb{R}^2$ tal que $\frac{\partial E}{\partial u_1} = F$, $\frac{\partial E}{\partial u_2} = G$, logo $E \in C^2$. Pelas expressões de F, G e lembrando que $W^2 = 1 + |q|^2 + |p|^2 + |p|^2 |q|^2 - \langle p, q\rangle^2$, tem-se:

$$\det(H(E)) = 1 \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial u_1^2} = \frac{1 + |p|^2}{W} > 0$$

Essas condições implicam que $H(E)$ é positiva definida. Agora basta aplicar os lemas anterior e segue o resultado. □

Teorema 3.3. *Seja S uma superfície na forma não-paramétricas e $f(u_1,u_2)$ solução da equação das superfícies minímas não-paramétricas em todo plano (u_1,u_2). Então $\exists\Gamma:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\Gamma(u_1,u_2)=(u_1,au_1+bu_2)\,,b>0,a\in\mathbb{R}$ tal que $\Gamma(u_1,u_2)$ são parâmetros isotérmicos para a superfície S.*

Demonstração. Novamente, tome F,G como no Teorema 2.2, definidas no plano (u_1,u_2). Pelo lema anterior, $T(u_1,u_2)=(u_1,u_2)+(F(u_1,u_2),G(u_1,u_2))$ é difeomorfismo global. Denote $(u_1',u_2')=T(u_1,u_2)$, então (u_1',u_2') são parâmetro isotérmicos, basta recordar a demonstração do Teorema 2.2 (teo. de exist. de param. iso.). Como (u_1',u_2') são parâmetros isotérmicos e S é miníma, x_k é harmônica, logo $\frac{\partial x_k}{\partial z}$ é analítica, $1\le k\le n$, tem-se que:

$$Im\left(\overline{\frac{\partial x_1}{\partial z}}\frac{\partial x_2}{\partial z}\right)=-\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u_1',u_2')}<0$$

Logo $\frac{\partial x_1}{\partial z}\neq 0$ e $\frac{\partial x_2}{\partial z}\neq 0$, então, $\psi=\frac{\frac{\partial x_2}{\partial z}}{\frac{\partial x_1}{\partial z}}$:

$$Im(\psi)=\frac{1}{\left|\frac{\partial x_1}{\partial z}\right|^2}\qquad Im\left(\overline{\frac{\partial x_1}{\partial z}}\frac{\partial x_2}{\partial z}\right)<0$$

Da segunda condição tem-se $Im(\psi)<0$. Sabemos que ψ é analítica, pelo corolário 1.1, $\exists c=a-bi,b>0,a\in\mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial x_2}{\partial z}=c\frac{\partial x_1}{\partial z}$$

Abrindo as expressão das derivadas de x_1,x_2 e utilizando a equação acima, tem-se:

1. $$\frac{\partial x_2}{\partial u_1'}=a\frac{\partial x_1}{\partial u_1'}-b\frac{\partial x_1}{\partial u_2'}$$

2. $$\frac{\partial x_2}{\partial u_2'}=a\frac{\partial x_1}{\partial u_2'}+b\frac{\partial x_1}{\partial u_1'}$$

Tome $\Gamma(u_1,u_2)=\left(u_1,\frac{u_2-au_1}{b}\right)$, sendo Γ_1,Γ_2 cada componente de Γ e lembrando que $x_1(u_1,u_2)=u_1,x_2(u_1,u_2)=u_2$, pois a superfície está na forma não-paramétrica, tem-se:

$$\frac{\partial\Gamma_2}{\partial u_2'}=\frac{\partial\Gamma_1}{\partial u_1'}$$

$$\frac{\partial\Gamma_2}{\partial u_1'}=-\frac{\partial\Gamma_1}{\partial u_2'}$$

Portanto $\Gamma=\Gamma_1+i\Gamma_2$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann, então $\Gamma(u_1',u_2')$ é analítica, logo conforme (basta lembrar da equivalência de ser conforme no caso complexo) e, pelo lema 2.3, segue que $\Gamma(u_1',u_2')$ são parâmetros isotérmicos. □

Lema 3.8. *Seja S uma superfície na forma não-paramétrica e $x:U\to S$ parametrização de S. Então se existe uma transformação linear não-singular T tal que $T(u_1,u_2)$ são parâmetros isotérmicos, então S está contida num plano.*

Demonstração. Com um abuso de notação tome $x=x\circ T$, então x_1,x_2 são lineares (composta de lineares), logo $\frac{\partial x_1}{\partial z},\frac{\partial x_2}{\partial z}$ são constantes, mas, como os parâmetros são isotérmicos, tem-se: $\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial x_i}{\partial z}\right)^2\equiv 0\Rightarrow\frac{\partial x_3}{\partial z}$ constante, logo x_3 é linear e S é um plano. □

Finalmente, segue o **Teorema de Bernstein**:

Teorema 3.4. *Seja S uma superfície no $\mathbb{R}^3$ na forma não-paramétrica, i.e, gráfico de uma função, solução da equação das superfícies minímas em todo $\mathbb{R}^2$, então S está contida num plano.*

Demonstração. Se S é uma superfície miníma nessas condições, pelo Teorema 2.3 e o lema anterior, segue que S está contida num plano. $\square$

4 Superfícies Máximas

Nessa seção irei demonstrar o Teorema de Calabi-Bernstein, o qual foi demonstrado por Calabi, que é o análogo do Teorema de Bernstein só que para superfície máximas no Espaço Lorentziano.

4.1 Introdução às Superfícies Máximas

Farei algumas recordações sobre o $\mathbb{L}^n$, seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e seja $\{dx_i\}_{i=1}^n$ base para o espaço dual de $\mathbb{R}^n$, esse conjunto também constitui uma base para as 1-formas (sempre assumirei diferenciáveis) do $\mathbb{R}^n$, então $\mathbb{L}^n$ é o $\mathbb{R}^n$ equipado com:

$$u, v \in \mathbb{L}^n, \langle u, v\rangle_{\mathbb{L}} = \sum_{i=0}^{n-1} (dx_i v)(dx_i u) \; - (dx_n v)(dx_n u)$$

$$v \in T_p\mathbb{L}^n, |v|^2_{\mathbb{L}} = \left| \left(dx_1^2\right)_p v + \ldots + \left(dx_{n-1}^2 v\right)_p - \left(dx_n^2\right)_p v \right|$$

Onde $(dx_i^2)_p\, v = \Big((dx_i)_p\, v\Big)^2$, ao que segue, omitirei o ponto p e usarei a identificação $T_p\mathbb{L}^n \cong \mathbb{L}^n$.
Lembrando algumas definições, $U \subset \mathbb{L}^n$ subespaço:
(1) Se o produto interno restrito a U for não degenerado e positivo definido, chamamos U de tipo espaço;
(2) Se $\forall u, v \in U, \langle u, v\rangle_{\mathbb{L}} = 0$, chamamos U de tipo luz;
(3) Se o produto interno restrito a U for não degenerado e indefinido, chamamos U de tipo tempo.
Seja $M \subset \mathbb{L}^n$ uma superfície regular, dizemos que M é tipo espaço (respectivamente, tempo ou luz) se, $\forall p \in M$, T_pM é um subespaço do $\mathbb{L}^n$ tipo espaço (respectivamente, tempo ou luz). Analogamente ao caso euclideano, seja $x : U \to \mathbb{L}^n$ uma parametrização de M superfície regular tipo espaço ou tempo e N um vetor normal à superfície:
· Primeira forma fundamental:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle_{\mathbb{L}}$$

· Segunda forma fundamental:

$$b_{ij} = \left\langle N, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle_{\mathbb{L}}$$

Lembrando que M tipo espaço (respectivamente, tempo) $\Leftrightarrow$ N tipo tempo (respectivamente, espaço), tem-se também que a curvatura média é dada por:

$$H = \epsilon \frac{Ee + Gg - 2Ff}{2\,(EG - F^2)}$$

Onde $\epsilon = \frac{\langle N, N\rangle_{\mathbb{L}}}{|N|^2_{\mathbb{L}}} = \begin{cases} 1, M\, \textit{é tipo tempo} \\ -1, M\, \textit{é tipo espaço} \end{cases}$.

Definição 4.1. *Seja M uma superfície tipo espaço, diz-se que M é uma superfície máxima se $H \equiv 0$.*

4.2 Superfícies não-paramétricas

Usando a mesma definição de superfície não-paramétrica para o espaço euclideano, segue que quando uma superfície M com parametrização $x : D \to \mathbb{L}^n$ está na forma não paramétrica, então ela é regular, pois $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}$ são linearmente independentes e, de forma completamente análoga ao caso já feito no $\mathbb{R}^n$, tem-se:

Lema 4.1. *Sejam M superfície não-paramétrica definida por $x : D \to \mathbb{L}^n$ e $N_3, ..., N_n : D \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1. Então $\exists! N_1, N_2 : D \to \mathbb{R}$ tal que $(N_1, ..., N_n) \in (T_pM)^{\perp}$.*

Lembrando que no $\mathbb{L}^n$ tem-se, se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^1:

$$\nabla_{\mathbb{L}^n} g = \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial u_{n-1}}, -\frac{\partial g}{\partial u_n} \right)$$

Quando não for colocado o subscrito $\mathbb{L}^n$ estarei usando a propriedade em questão no espaço euclideano. Enunciarei um lema que será bem útil na demonstração do Teorema de Calabi.

Lema 4.2. *Seja $x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, g(u_1, u_2))$ uma parametrização de $M \subset \mathbb{L}^3$, então:*

$$M \textit{ é tipo tempo} \Leftrightarrow |\nabla g|^2 > 1$$

$$M \textit{ é tipo espaço} \Leftrightarrow |\nabla g|^2 < 1$$

Demonstração. Segue que $\frac{\partial x}{\partial u_1} = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial u_1}\right), \frac{\partial x}{\partial u_2} = \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial u_2}\right)$, então:

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial u_1} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial u_2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial u_1}, -\frac{\partial g}{\partial u_2}, -1 \right)$$

Como todo vetor normal à M será paralelo ao produto vetorial acima, tem-se, se N é normal à M:

$$N \textit{ é tipo tempo} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2 < 1$$

$$N \textit{ é tipo espaço} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2 > 1$$

Como $\left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2 = |\nabla g|^2$, segue o resultado. □

Sendo assim, de forma análoga ao caso das superfícies minímas, pode-se mostrar a **equação das superfícies máximas não-paramétricas**, seja $x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, g(u_1, u_2))$, então:

$$\left(1 - \left\langle \frac{\partial g}{\partial u_2}, \frac{\partial g}{\partial u_2} \right\rangle_{\mathbb{L}}\right) \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} + \left(1 - \left\langle \frac{\partial g}{\partial u_1}, \frac{\partial g}{\partial u_1} \right\rangle_{\mathbb{L}}\right) \frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2} + 2 \left\langle \frac{\partial g}{\partial u_1}, \frac{\partial g}{\partial u_2} \right\rangle_{\mathbb{L}} \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2} = 0$$

A partir de agora será usada as seguintes notações, seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, denote:

$$\partial_1 h = \frac{\partial h}{\partial u_1} \qquad \partial_2 h = \frac{\partial h}{\partial u_2}$$

$$\partial_{21}^2 h = \partial_{12}^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial u_1 \partial u_2}$$

$$\partial_1^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial u_1^2} \qquad \partial_2^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial u_2^2}$$

Com isso, pode-se reescrever a **equação das superfícies máximas não-paramétricas**, seja $x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, g(u_1, u_2))$:

$$(1 - \langle \partial_2 g, \partial_2 g \rangle_{\mathbb{L}}) \partial_1^2 g + (1 - \langle \partial_1 g, \partial_1 g \rangle_{\mathbb{L}}) \partial_2^2 g + 2 \langle \partial_1 g, \partial_2 g \rangle_{\mathbb{L}} \partial_{12}^2 g = 0$$

A partir daqui manterei fixado $n = 3$, ou seja, todas superfícies estarão em $\mathbb{L}^3$ (salvo em menção explícita ao contrário). Vou mostrar uma outra igualdade, que será bem útil, para a equação das superfícies máximas não-paramétrica, $x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, g(u_1, u_2))$ parametrização de M, segue:

$$div\left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1 - |\nabla g|^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla g|^2}} \left(\partial_1^2 g - \partial_1^2 g (\partial_1 g)^2 - \partial_1^2 g (\partial_2 g)^2 + \partial_1^2 g (\partial_1 g)^2 + \partial_1 g \partial_2 g \partial_{12}^2 g\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla g|^2}} \left(\partial_2^2 g - \partial_2^2 g (\partial_1 g)^2 - \partial_2^2 g (\partial_2 g)^2 + \partial_2^2 g (\partial_2 g)^2 + \partial_1 g \partial_2 g \partial_{12}^2 g\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla g|^2}} \left(\left(1 - (\partial_2 g)^2\right) \partial_1^2 g + \left(1 - (\partial_1 g)^2\right) \partial_2^2 g + 2 \partial_1 g \partial_2 g \partial_{12}^2 g\right)$$

Da última igualdade segue que $div\left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1-|\nabla g|^2}}\right) = 0$ é equivalente a satisfazer a equação das superfícies máximas não-paramétricas. De forma completamente análoga, se $x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$ uma parametrização de S superfície no $\mathbb{R}^3$, pode-se mostrar que:

$$div\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow f \textit{satisfaz a equação das superfícies minímas não-paramétricas}$$

4.3 Teorema de Calabi-Bernstein

Mostrarei um teorema que junto com o Teorema de Bernstein (já demonstrado) têm como corolário o Teorema de Calabi-Bernstein, farei uma breve revisão sobre formas no $\mathbb{R}^2$, tome $\{dx, dy\}$ base dual da base canônica do $\mathbb{R}^2$, seja $X = (X_1, X_2)$ um campo de vetores no $\mathbb{R}^2$, defina:

$$\omega_{X(p)}(v) = \langle X(p), v \rangle$$

É fácil ver que $\omega_X = X_1 dx + X_2 dy$. Denotando por d a derivada exterior e o operador $J(x, y) = (-y, x)$, tem-se:

$$d\omega_X = dX_1 \wedge dx + dX_2 \wedge dy = \left(-\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x}\right) dx \wedge dy$$

Com isso, é fácil ver que $(div(X))\, dx \wedge dy = d\omega_{JX}$.

Teorema 4.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo, são equivalentes:*

(i) $\exists f \in C^2$ não linear em Ω tal que $div\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0$;

(ii) $\exists g \in C^2$ não linear em Ω tal que $div\left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1-|\nabla g|^2}}\right) = 0$ e $|\nabla g|^2 < 1$.

Demonstração. Utilizando as notações anteriores, tem-se:
(i) $\Rightarrow$ (ii)
Seja $F = \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}$, como $divF = 0$, segue que a 2-forma $d\omega_{J(F)}$ é fechada em Ω, tome $g \in C^2$ tal que $J(F) = \nabla g$ (o lema de Poincaré garante que $\exists\beta$ uma 0-forma, i.e, função diferenciável, tal que $d\beta = \omega_{J(F)} = \langle J(F), .\rangle$, note que $\nabla\beta = J(F)$, tome $g = \beta$), como J é uma isometria, segue que $|\nabla g|^2 = \frac{|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2} < 1$, portanto o gráfico de g é uma superfície tipo espaço. Tem-se também $\frac{1}{1-|\nabla g|^2} = \frac{|\nabla f|^2}{|\nabla g|^2} = 1 + |\nabla f|^2$, observe que $J^2 = J \circ J = -Id$, então:

$$J\left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1-|\nabla g|^2}}\right) = \sqrt{1+|\nabla f|^2}J(\nabla g) = -\nabla f$$

Logo $div\left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1-|\nabla g|^2}}\right) dx \wedge dy = d\omega_{J\left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1-|\nabla g|^2}}\right)} = -d\omega_{\nabla f} = -\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right) dx \wedge dy \equiv 0$, então a forma é fechada, o que implica $div\left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1-|\nabla g|^2}}\right) \equiv 0$, basta provar que g não é linear, suponha, por absurdo, que seja, logo $|\nabla g|^2$ é constante, mas $|\nabla f|^2 = \frac{|\nabla g|^2}{1-|\nabla g|^2}$ e $J(F) = \nabla g$, então ∇f tem que ser constante, contrariando a hipótese que f é não linear, logo g é não linear.
(ii) $\Rightarrow$ (i)
Seja $G = \frac{\nabla g}{\sqrt{1-|\nabla g|^2}}, |\nabla g|^2 < 1$, como $divG = 0$, segue que a 2-forma $d\omega_{J(G)}$ é fechada em Ω, tome $f \in C^2$ tal que $J(G) = \nabla f$, como J é uma isometria, segue que $|\nabla f|^2 = \frac{|\nabla g|^2}{1-|\nabla g|^2}$. Tem-se também $\frac{1}{1+|\nabla f|^2} = \frac{|\nabla g|^2}{|\nabla f|^2} = 1 - |\nabla g|^2$, então:

$$J\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = \sqrt{1-|\nabla g|^2}J(\nabla f) = -\nabla g$$

Logo $div\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) dx \wedge dy = d\omega_{J\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)} = -d\omega_{\nabla g} = -\left(-\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}\right) dx \wedge dy \equiv 0$, então a forma é fechada, o que implica $div\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f^2|}}\right) \equiv 0$, f é não linear, com o mesmo argumento do caso anterior.

$\square$

Lembrando que o $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo, então pode-se tomar $\Omega = \mathbb{R}^2$ e enunciar o teorema anterior (de forma informal) da seguinte maneira: existe uma solução não linear no $\mathbb{R}^2$ da equação das superfície minímas se, e somente se, existe uma solução não linear no $\mathbb{R}^2$ da equação das superfícies máximas. Finalmente, pode-se enunciar o **Teorema de Calabi-Bernstein**:

Teorema 4.2. *Seja M uma superfície no $\mathbb{L}^3$ na forma não-paramétrica, i.e, gráfico de uma função, solução da equação das superfícies máximas em todo $\mathbb{R}^2$, então M está contida num plano.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema de Bernstein e o Teorema anterior. $\square$

Referências

[1] Manfredo Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice Hall, first edition, 1976.

[2] Manfredo P. Do Carmo. *Differential Forms and Applications*. Universitext. Springer-Verlag, 2000.

[3] Henri Cartan. *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*. Addison Wesley Longman Publishing Co, 1963.

[4] Osamu KOBAYASHI. Maximal surfaces in the 3-dimensional minkowski space l^3. *Tokyo J. of Math.*, 06(2):297–309, 12 1983.

[5] Robert Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces.* Dover Pubns, 1986.

[6] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume vol 5. Publish or Perish, 3rd edition, 1999.