Pewna charakteryzacja ruchu jed. przysp. 24.09.2008

1. Punktem wyjścia będzie następujące

ZADANIE Ciało K porusza się po prostej l. Znaleźć taki jego ruch, aby w każdym przedziale czasu $[t,t']$ $(t,t' \in \mathbb{R},\ t<t')$ zachodził warunek

(*) prędkość średnia w przedziale $[t,t']$ = prędkość w chwili $\frac{t+t'}{2}$.

Na literach chodzi o to, aby znaleźć funkcje $x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (położenie ciała K od czasu) i $v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takie, że

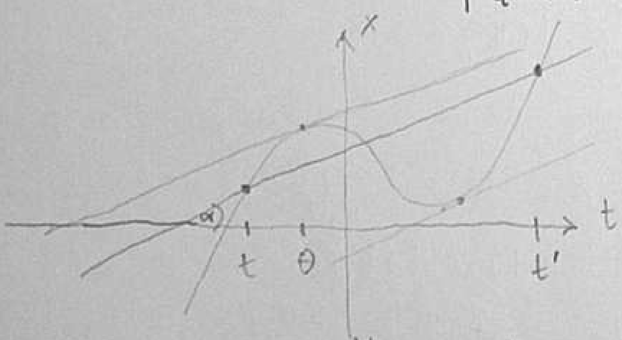
(**) $$\frac{x(t')-x(t)}{t'-t} = v\left(\frac{t+t'}{2}\right), \qquad t<t'.$$

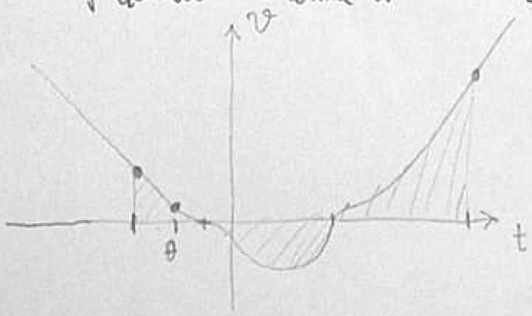
Można sprawdzić, że dwa doskonale nam znane ruchy: jednostajny i jednostajnie przyspieszony mają powyższą własność. Czy są inne?

2. Zanim rozwiążemy zadanie przyjrzyjmy się jeszcze jego genezie, czyli

TW (Lagrange) Niech ciało K porusza się (porządnie = tak, że jego prędkość w każdej chwili jest określona i skończona) po prostej l. Wówczas dla każdego przedziału czasu $[t,t']$ istnieje taka chwila pośrednia $\theta \in (t,t')$, że

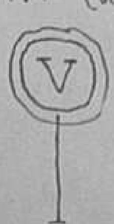
prędkość w chwili θ = prędkość średnia w $[t,t']$.





$\operatorname{tg}\alpha$ = prędkość średnia w $[t,t']$ = $\operatorname{tg}\beta$ = prędkość w chwili θ

Ciekawostka: WN (dla Policji) Jeśli prędkość średnia auta na pewnym przedziale czasu $[t,t']$ przekroczyła V, to kierowca złamał przepis w pewnej chwili czasu $\theta \in (t,t')$.



D-D. Isp. z tw.

II sp. (elementarnie) Załóżmy dla uproszczenia, że auto nie zawracało w przedziale czasu $[t, t']$, tzn. że $v(\tilde{t}) \geq 0$, $\tilde{t} \in [t, t']$. Wówczas, gdyby przeciwnie $\forall \theta \in (t, t')$ $v(\theta) \leq V$, to

$$\text{prędkość średnia w } [t, t'] = \frac{\text{pole pod wykresem } v(\theta) \text{ w } [t, t']}{t'-t}$$

$$\leq \frac{\text{pole prostokąta o wys. } V \text{ i dł. } t'-t}{t'-t} = V$$

i sprzeczność. $\square$

W naszym zadaniu chodzi o to, aby ta chwila pośrednia θ była zawsze środkiem przedziału.

3. Przechodzimy do rozwiązania. Wobec (**) możemy napisać, że

$$(t'-t)\, v\left(\frac{t+t'}{2}\right) = x(t') - x(t), \quad t, t' \in \mathbb{R}.$$

Kładąc $t = 0$ mamy $t' v\left(\frac{t'}{2}\right) = x(t') - x(0)$, co po wstawieniu do powyższego daje

$$(t'-t)\, v\left(\frac{t+t'}{2}\right) = t' v\left(\frac{t'}{2}\right) - t v\left(\frac{t}{2}\right), \quad t, t' \in \mathbb{R}.$$

Wprowadzając dla ułatwienia pomocniczą funkcję $w(t) := v\left(\frac{t}{2}\right) - v(0)$ mamy

$$(t'-t)\, w(t+t') = t' w(t') - t w(t), \quad t, t' \in \mathbb{R}$$

Podstawiając $-t = t'$, wobec $w(0) = 0$, jest

$$0 = -t w(-t) - t w(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

skąd $w(-t) = -w(t)$. Teraz zamieniając t na $-t$ mamy

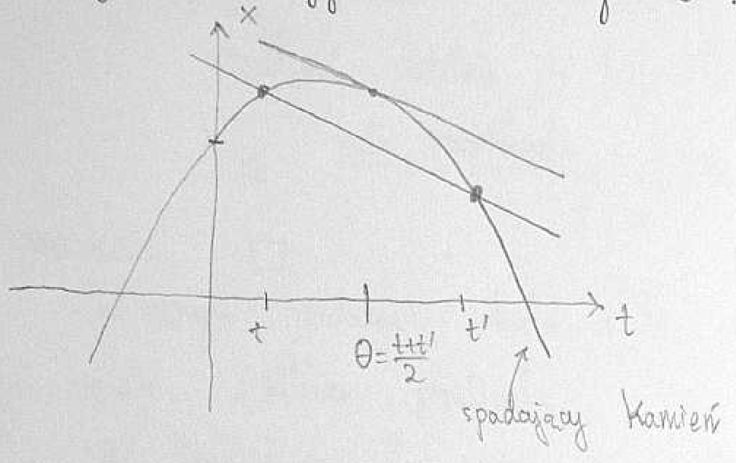
$$(t'+t)\, w(t'-t) = t' w(t') + t w(-t) = t' w(t') - t w(t)$$
$$= (t'-t)\, w(t+t'),$$

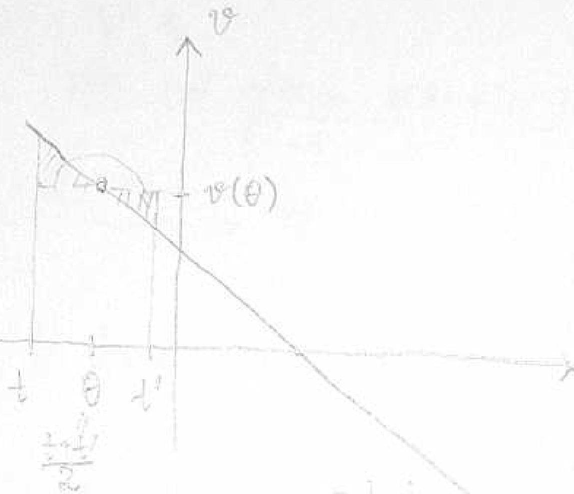
czyli dla t, t' t. że $t'-t \neq 0$ i $t'+t \neq 0$ jest

$$\frac{w(t'-t)}{t'-t} = \frac{w(t+t')}{t'+t} = \text{const} = \frac{g}{2},$$

więc $w(t) = \frac{g}{2} t$, $t \in \mathbb{R}$. Tym samym $v(t) = w(2t) + v_0 = v_0 + gt$ – przypomina ruch jed. przysp. Pozostaje obliczyć x. Mamy $x(t) = t v\left(\frac{t}{2}\right) + x_0 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ i zgadza się! Jedyny możliwy ruch ciała K o własności z zadania, to ruch jednostajnie przyspieszony (w szczególności z przyspieszeniem g zerowym, czyli jednostajny). A że taki ruch niewątpliwie ma zadaną własność, to dowodzi, że innych ruchów nie ma.

Jak to wygląda na wykresie?





$$\text{prędkość średnia} = \frac{\text{pole trapezu}}{t'-t} = v(\theta)$$

4. Można się zastanawiać nad znalezieniem ruchów o innych własnościach. Np. znaleźć x, v (funkcje ruchu) takie, że

$$\frac{x(t')-x(t)}{t'-t} = v(t'-t) \quad , \quad t<t'$$

(prędkość średnia jest funkcją tylko długości przedziału czasu $[t,t']$), ale ten problem to już trochę inna bajka.