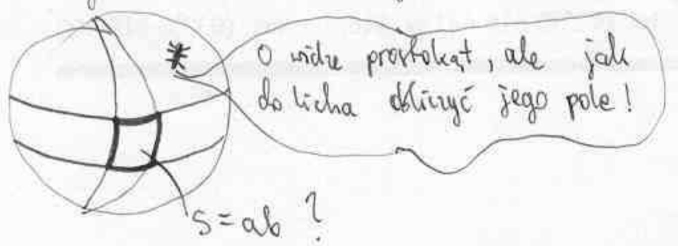
Pole prostokąta

1. Czy wzór na pole prostokąta $S=ab$ jest oczywisty? Dla nas, ludzi żyjących w przestrzeni 3D (czy aby na pewno? - raczej nie) tak. Ale jakiego wzoru powinna użyć mrówka żyjąca na sferze?



Dla nas z zewnątrz ten prostokąt na sferze nie wygląda już jak prostokąt, ale dla mrówki jak najbardziej. Może zatem być jakiś stwór dla którego, patrzącego z zewnątrz, nasze prostokąty też nie wyglądają jak prostokąty, więc i wzór $S=ab$ nie będzie oczywisty. Dlatego go dziś wyprowadzimy.

2. Co to jest pole powierzchni? Pole powierzchni prostokąta możemy określić tak

• P: {zbiór wszystkich prostokątów} $\longrightarrow$ {liczby dodatnie}

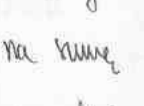
•• P jest addytywna, tzn

P(prostokąt A i B sklejone bokiem) = P(prost. A) + P(prost. B)

(Liczenie pieniędzy też jest np. addytywne, bo żeby obliczyć ile mamy pieniędzy wystarczy, że obliczymy ile ich mamy w prawej i lewej kieszeni i dodamy - na nasze pieniądze nie ma wpływu gdzie są, tak samo z prostokątami - nie ważne czy sklejone czy nie).

Formalnie, prostokąt będziemy opisywać podając dł. jego boków.

prostokąt (x,y)

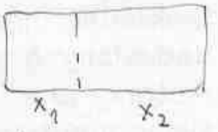


Wtedy

• $P(x,y) > 0, \quad x,y>0$

•• $P(x_1+x_2, y) = P(x_1,y) + P(x_2,y)$

$P(x, y_1+y_2) = P(x,y_1) + P(x,y_2)$



3. Zajmijmy się prostokątami z zamrożonym jednym bokiem, np. y jest stałe i chcemy zbadać jak zmienia się $P(x,y)$ jak ruszamy bokiem x.

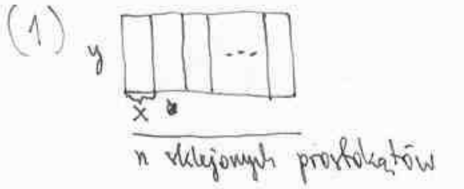
Dla uproszczenia napiszmy $f(x) = P(x,y)$.
Mamy więc z aksjomatów z 2.

• $f > 0$

•• $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

Znajdziemy wzór na funkcję f.

(1)



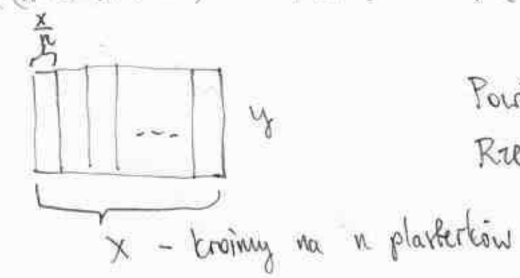
Powinno być $f(nx) = n f(x)$.

Rzeczywiście z ••

$$f(nx) = f((n-1)x + x) = f((n-1)x) + f(x)$$

$$= f((n-2)x + x) + f(x) = f((n-2)x) + 2f(x) = \dots = n f(x).$$

(2)



Powinno być $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x)$.

Rzeczywiście z (1)

$$f(x) = f\left(n \cdot \left(\frac{x}{n}\right)\right) = n f\left(\frac{x}{n}\right).$$

(3) Można połączyć (1) i (2) żeby dostać dla $\mathbb{N} \ni m, n > 0$

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = m f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n} f(x) \quad , x > 0$$

Mamy więc dla $x = 1$ wzór $f(r) = r \underbrace{f(1)}_{c>0} = cr$, $0 < r \in \mathbb{Q}$.

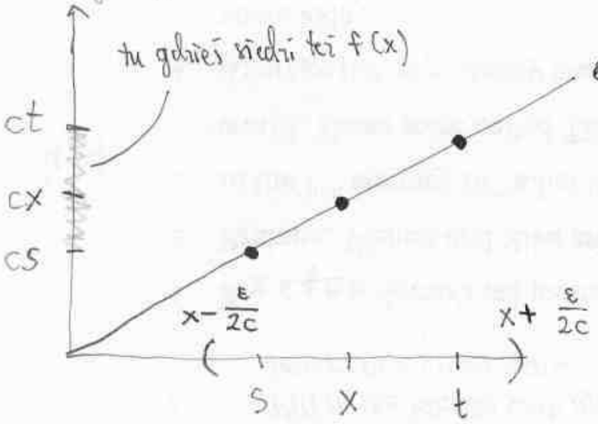
Wystarczy zrobić jeszcze jeden mały kroczek i pokazać, że $f(x) = cx$, $x > 0$.

(4) f jest rosnąca, tzn. $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.

Rzeczywiście, gdy $x < y$, to $0 < y - x$ i mamy

$$f(y) = f((y-x) + x) = \underbrace{f(y-x)}_{>0 \text{ z } \bullet} + f(x) > f(x).$$

(5) Pokażemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ $|f(x) - cx| < \varepsilon$, co mamy, $f(x) = cx$ (gdyby $f(x) \neq cx$, to $|f(x) - cx| > 0$ i biorąc $\varepsilon < |f(x) - cx|$ mamy sprzeczność).



Weźmy liczby wymierne s, t blisko x (jak blisko zaraz zobaczymy), $s < x < t$.

Mamy z (4)

$$cs = f(s) < f(x) < f(t) = ct,$$

czyli zarówno $f(x)$ jak i cx leżą między cs i ct. Stąd

$$\text{odległość}(cx, f(x)) = |f(x) - cx| < \text{odległość}(cs, ct) = c|t - s|.$$

Jeśli weźmiemy s, t tak blisko x, że $|t - s| < \frac{\varepsilon}{c}$, to

$$|f(x) - cx| < \varepsilon.$$

(6) Mamy zatem $f(x) = cx$. y jest zamrożone, ale wpływa jakoś na f; skoro $c = f(1) > 0$, to c zależy od y. Mamy więc

$$P(x,y) = f(x) = c(y) \cdot x.$$

Stosując •• mamy $c(y_1+y_2) \cdot x = c(y_1) \cdot x + c(y_2)$, skąd $c(y_1+y_2) = c(y_1) + c(y_2)$. Funkcja c zachowuje się więc tak samo jak f i mamy $c(y) = Cy$. Ostatecznie

$$P(x,y) = Cxy.$$

Ale co to jest C? Zobaczmy $P(1,1) = C$, więc C jest polem powierzchni kwadratu jednostkowego i możemy się umówić, że np. $C = 1$, albo $C = \sqrt{2}$. Wtedy

$$P = xy.$$

4. Powyższe rozumowanie pochodzi od Legendre'a (1791). To co myśmy tutaj zrobili, to tak naprawdę, mądrze mówiąc, rozwiązaliśmy równanie funkcyjne

$f: (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ $\qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$

Równanie $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ przy założeniu ciągłości rozwiązał Cauchy w 1820 r. Potem Darboux usunął to założenie i pokazał, że jeśli f jest tylko

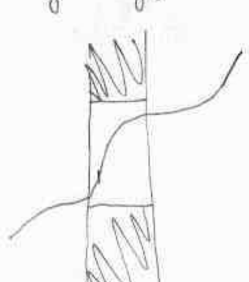
- ciągła w punkcie
- monotoniczna
- nieujemna (niedodatnia) w $[0,+\infty)$
- ograniczona z góry lub z dołu w pewnym przedziale (!)

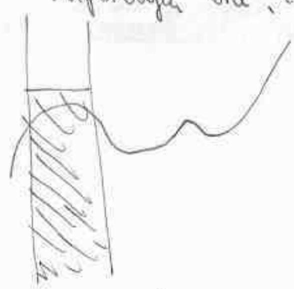
to już musi być postaci cx. Dowody tych prawideł są bardzo przyjemne, ale miejscami chytre. Jednak chytrość jest pozorna, bo ogólnie

jeśli f spełnia rów. Cauchy'ego, ale nie jest postaci cx, to wykres f jest gęsty na płaszczyźnie.

Każdy z myślników przeczy gęstości wykresu, więc implikują one, że $f \equiv cx$.

ciągłość w punkcie


monot.


ograniczoność.