Wrześniowe kółko we Fryczu nr 1 — różności

7.IX.2009r.

Twierdzenie 1 (ważny wzorek)**.** *Dla liczb rzeczywistych* a, b *i liczby całkowitej dodatniej* n *zachodzi*

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Wniosek 1. *Dla liczb rzeczywistych* a, b *i liczby nieparzystej* n *zachodzi*

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Wniosek 2. *Dla liczb całkowitych* a, b *i liczby całkowitej dodatniej* n *zachodzi podzielność*

$$(a-b)|(a^n - b^n).$$

Twierdzenie 2. *Dany jest czworokąt wypukły* $ABCD$*. Są równoważne*

(1) *na czworokącie* $ABCD$ *można opisać okrąg*
(2) *suma pewnej/każdej pary przeciwległych kątów jest kątem półpełnym*
(3) *pewien/każdy z kątów wewnętrznych przystaje do kąta zewnętrznego przy przeciwległym wierzchołku*
(4) $\angle ABD \equiv \angle ACD$

Kilka zadań

1 (LVIOMIIst)**.** Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n dla których obie liczby $n^n + 1$, $(2n)^{2n} + 1$ są pierwsze.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle A = 30°, \angle C = 50°$. Punkt D leży na boku AB, przy czym $BD = BC$. Wykazać, że $CD = AB$.

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 60°$ oraz $AC < BC$. Punkt D leży na boku BC, przy czym $BD = AC$. Punkt E jest punktem symetrycznym do punktu A względem punktu C. Udowodnić, że $AB = DE$.

4. Dana jest szachownica 8×8, której pola pokolorowane są w tradycyjny sposób. W jednym ruchu zmieniamy kolory pól w wybranym wierszu lub kolumnie: czarne pola przekolorowujemy na białe, a białe na czarne. Rozstrzygnąć, czy po pewnej liczbie ruchów możemy otrzymać szachownicę, w której dokładnie jedno pole jest czarne.

5. Dla $a, b > 0$ udowodnić, że $a^a + b^b > ab$.