Wrześniowe kółko we Fryczu nr 3 — teoria liczb i dobre tożsamości

11.IX.2009r.

Twierdzenie 1 (dobre tożsamości)**.**

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \tag{1}$$

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3bc(b+c)+3ca(c+a)+6abc \tag{2}$$

$$= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a). \tag{3}$$

Twierdzenie 2 (łatwa ale pożyteczna nierówność)**.** *Dla liczb rzeczywistych $x, y \geqslant 2$ zachodzi*

$$xy \geqslant x+y,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = 2$.

Kilka zadań

1. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie a, b dla których $ab|a+b$.

2 (LVIIOMIst)**.** Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ oraz takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, że $a+b+c = p+1$ oraz liczba $a^3+b^3+c^3-1$ jest podzielna przez p. Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1.

3 (LIXOMIst)**.** Znaleźć wszystkie takie trójki liczb pierwszych (p, q, r), że liczby $p^3+q^3+r^3-2pqr$, $pq+qr+rp$ są podzielne przez $p+q+r$.

4 (LIVOMIst)**.** Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie x, y spełniające równanie $(x+y)^2-2(xy)^2 = 1$.