Les sous-groupes finis de $SO(3)$

Laurent Dietrich *

16 mai 2011

Réf. : Ramis, Warufsel, Moulin – Cours de mathématiques pures et appliquées 1 – à retravailler !

Théorème. *Tout sous-groupe fini de $SO(3)$ est soit cyclique, soit diédral, soit isomorphe à $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$, ou $\mathfrak{A}_5$.*

On suivra le plan suivant :

1) – G fini agit sur un ensemble fini X ayant au moins 2 éléments.
   – Tout élément non trivial de G a exactement 2 points fixes dans X.
   – Pour tout $x \in X$, G_x est cyclique non trivial.
2) En notant r le nombre d'orbites de X sous G, Ω_i les orbites classées comme suit : $|\Omega_1| \geqslant \cdots \geqslant |\Omega_r|$ et n_i le cardinal commun des stabilisateurs associés, alors on a la formule

$$\sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 - \frac{2}{|G|} \tag{1}$$

3) Discussion de tous les cas possibles.

Démonstration. 1) G agit sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Si $g \in G$ est non trivial, il a une droite de points fixes qui touche la sphère en x et $-x$: on les appelle pôles de g. Notons X l'ensemble des pôles des éléments non triviaux. On a X fini et $|X| \geqslant 2$. X est stable par G car si x est un pôle de g et $h \in G$, $h(x)$ est un pôle de hgh^{-1}. Puis, g non trivial a exactement deux points fixes sur la sphère : ses pôles, qui sont donc dans X. Pour la dernière assertion, on remarque que si $x \in X$ est un pôle de g, $|G_x| \geqslant 2$ et $P := vect(x)^{\perp}$ est un plan vectoriel tel que $\forall g \in G_x$, $g(P) = P$ et $g_{|P} \in SO(P)$. On a un morphisme $G_x \to SO(P)$ qui envoie g sur $g_{|P}$, qui est injectif car $\mathbb{R}^3 = vect(x) \oplus P$, donc G_x est isomorphe à un sous groupe de $SO(P) \cong SO_2(\mathbb{R})$ donc est cyclique (résultat facile qui est admis ici).

2) Soit $1 \leqslant i \leqslant r$, $\forall x \in \Omega_i$, $|\Omega_i| = \frac{|G|}{|G_x|}$ ce qui montre que $|G_x|$ ne dépend que de i, on le note n_i. Par hypothèse on a $2 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_r$. Par la formule de Burnside (en fait de Frobénius) :

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)| = \frac{1}{|G|} \left(|X| + 2\left(|G| - 1\right)\right)$$

donc $r - \frac{|X|}{|G|} = 2 - \frac{2}{|G|}$ et comme $|X| = \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{n_i}$ on a la formule escomptée.

*http://perso.eleves.bretagne.ens-cachan.fr/~ldiet783

3) Le terme de droite est dans $[1,2[$ et chaque terme de la somme de gauche, dans $[\frac{1}{2},1[$, il en résulte que $r=2$ ou 3.

Si $r=2$ alors 1 donne $\frac{|G|}{n_1}+\frac{|G|}{n_2}=2$ et ces deux termes étant entiers, $n_1=n_2=|G|$. On a donc deux orbites de cardinal 1, soit $X=\{x,y=-x\}$ et $G=G_x=G_y$ est cylique par 1).

Si $r=3$, alors [1] $n_1=2$ et puisque $n_1||G|$ on note $|G|=2n$ et on poursuit.

a) Si $n_2=2$ alors 1 donne [2] $n_3=n$ donc $\Omega_3=\{x,y\}$ avec $y\neq x$. Soit a un générateur de G_x qui est un groupe cyclique d'ordre n ; de sorte que $a(x)=x$ et $a(y)=y$ [3]. En fait $y=-x$ puisque x et y sont les deux pôles de a. Soit $s\in G$ tel que $s(x)=-x$. Alors $s\notin G_x$ donc les deux points fixes de s ne sont pas dans Ω_3 et s^2 a au moins 4 points fixes : ceux de s, ainsi que x et $y=-x$. Par 1), $s^2=id$ et comme $(sa)(x)=y$ le même raisonnement montre que $(sa)^2=id$. De plus, $\langle s,sa\rangle$ engendre tout G_x [4] et contient $\langle s\rangle$ donc $\langle s,sa\rangle=G$ par cardinalité : on reconnaît une présentation par générateurs et relations de $\mathbb{D}_n$.

b) Désormais $n_2\geqslant 3$ et en fait $n_2=3$ [5] ; ainsi 1 s'écrit $1/2+2/3+(1-1/n_3)=2-1/n$ soit $1/n_3=1/6+1/n$ donc $n_3<6$ donc $(n_3,n)=(3,6)$, $(4,12)$ ou $(5,30)$.

i) Si $(n_1,n_2,n_3)=(2,3,3)$ alors $|G|=12$ et l'action de G sur Ω_2 est fidèle car seul id fixe chacun des $12/3=4$ éléments de cette orbite. D'où un morphisme injectif $G\to\mathfrak{S}_4$ et par cardinalité, $G\cong\mathfrak{A}_4$ qui est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$.

ii) Si $(n_1,n_2,n_3)=(2,3,4)$ alors $|G|=24$ et $|\Omega_2|=8$. Si $a\in\Omega_2$, G_a est cyclique d'ordre 3 et inversement si $g\in G$ est d'ordre 3 alors [6] ses points fixes $a,-a$ sont dans Ω_2. Donc $\Omega_2=\bigcup_{i=1}^4\{a_i,-a_i\}$; les quatre paires $\{a_i,-a_i\}$ sont permutées par G donc on a un morphisme $f:G\to\mathfrak{S}_4$. Montrons par l'absurde qu'il est injectif. Si $g\in\ker f$ est non trivial, g laisse stable les paires donc g^2 admet tout Ω_2 comme points fixes et donc $g^2=id$ par 1). Les deux points fixes c et $-c$ de g sont dans $\Omega_1\cup\Omega_3$ [7] donc g échange a_i et $-a_i$ pour tout i. Soit $h\in G$ quelconque, alors $hgh^{-1}\in\ker f$ est non trivial, et on a la même conclusion, si bien que g et hgh^{-1} ont la même restriction à Ω_2 et donc $hgh^{-1}g^{-1}$ a 8 points fixes donc $g=hgh^{-1}$ par 1). Or, les points fixes de hgh^{-1} sont $h(a)$ et $-h(a)$, donc $\{a,-a\}$ est stable sous G ce qui est absurde puisqu'il n'y a pas d'orbite de cardinal 2. Au final f est injectif et par cardinalité, $G\cong\mathfrak{S}_4$.

iii) Si $(n_1,n_2,n_3)=(2,3,5)$, $|G|=60=2^2\times3\times5$, $|\Omega_1|=30$, $|\Omega_2|=20$ et $|\Omega_3|=12$. On admet que le seul groupe simple d'ordre 60 est $\mathfrak{A}_5$ et on montre que G est simple. Soit $g\in G$ non trivial, g possède un point fixe a et $g\in G_a$ donc g est d'ordre 2, 3 ou 5. Notons $G(p)$ l'ensemble des éléments de G d'ordre p. En dénombrant $A=\{(g,a)\in G(2)\times\Omega_1$ tels que $g(a)=a\}$ on montre
[8]

1. sinon $\sum_{i=1}^3(1-1/n_i)\geqslant 2$.
2. $1+1-1/n3=2-2/n$
3. sinon $y=a^n(y)=a^{n-1}(a(x))=a^{n-1}(x)=x$.
4. car $a^k=s(sa)\cdots s(sa)$.
5. car sinon $n_3\geqslant n_2\geqslant 4$ donc $\sum_{i=1}^3(1-1/n_i)\geqslant 1/2+2\times3/4=2$.
6. car par cardinalité $G_a=G_{-a}=\langle g\rangle$ (ces deux groupes contiennent $\langle g\rangle$ d'ordre 3 et sont de même ordre 2, 3 ou 4 : ils ne peuvent pas contenir d'autre élément sinon ils seraient d'ordre >4) donc $orbite(a)=orbite(-a)=\Omega_2$ la seule orbite de cardinal 8.
7. car si $c\in\Omega_2$, G_c est cyclique d'ordre 3 n'a pas d'élément d'ordre 2, absurde et de même pour $-c$.
8. $|A|=\sum_{g\in G(n_i)}|Fix(g)\cap\Omega_i|=\sum_{g\in G(n_i)}|Fix(g)|=2G(n_i)$ car les points fixes d'un élément d'ordre n_i sont dans Ω_i pour la raison évoquée en note 6. D'autre part $|A|=\sum_{x\in\Omega_i}|G_x\cap G(n_i)|=|G|-|\Omega_i|$ car $G_x\cap G(n_i)=G_x\setminus\{id\}$ vu que G_x est d'ordre n_i, premier. D'où $|G(n_i)|=\frac{|G|-|\Omega_i|}{2}$.

que $|G(2)| = 15$ et de même $|G(3)| = 20$ et $|G(5)| = 24$. Soit $H \lhd G$ non trivial. Les théorèmes de Sylow permettent d'affirmer, par comptage des éléments, que G a 10 sous-groupes d'ordre 3 (ce sont des 3-Sylow) et 6 d'ordre 5.[9] Si H contient un 5-Sylow il contient les 6 et alors $6 \| |H|$[10], de même si H contient un 3-Sylow, $10 \| |H|$. Par ailleurs H ne peut contenir $G(3) \cup G(5)$[11]. Par le théorème de Cauchy, si $3 \| |H|$, $|H|$ contient un élément d'ordre 3 donc un 3-Sylow donc un élément d'ordre 5 par ce qu'on vient de voir et une nouvelle application du théorème de Cauchy, donc $G(3) \cup G(5)$: au final $3 \not| |H|$ et de même $5 \not| |H|$ donc $|H| = 2$ ou 4. Si $|H| = 4$, H est un 2-Sylow, distingué donc unique, donc contient $G(2)$[12] de cardinal 15, absurde. Si $|H| = 2$, l'élément non trivial h de H est d'ordre 2 et dans le centre de G[13], et on a exactement la même absurdité que pour la preuve de l'injectivité dans ii), en échangeant les lettres g et h. Donc finalement H est trivial et G est simple, donc $G \cong \mathfrak{A}_5$ et on a (enfin) terminé !

Remarque : en travail de synthèse on note, mais c'est compliqué à écrire aussi, que $\mathfrak{A}_4$ est bien (isomorphe au) le groupe des déplacements du tétraèdre régulier, $\mathfrak{S}_4$ celui du cube et $\mathfrak{A}_5$ celui du dodécaèdre. □

9. Il y a 1 ou 6 5-Sylow, ils contiennent tous les éléments d'ordre 5, et il y a 24 éléments d'ordre 5. On fait la même discussion pour 3.

10. regarder l'action de H sur ses sous-groupes par conjugaison et appliquer la formule des classes à l'orbite constituée des 5-Sylows.

11. car alors $|H| \geqslant 20 + 24 = 44$ donc $H = G$.

12. car tout sous-groupe d'ordre 2 est contenu dans un 2-Sylow, ça fait partie des théorèmes de Sylow.

13. car $ghg^{-1} = id$ ou h mais $\neq id$ tout simplement.