UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRENTO
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea triennale in Matematica

Elaborato finale

PARADOSSO DI BANACH-TARSKI E GRUPPI AMMISSIBILI

Relatore:
Gabriele Greco

Laureando:
Cristoferi Riccardo

Anno Accademico 2007-2008

Introduzione

Motivazioni.

Prendere un grano di sabbia. Dividerlo in un numero finito di pezzi. Usare delle isometrie per riarrangiare questi pezzi fra di loro. E ottenere il sole. Questo è il *paradosso di Banach-Tarski*!

Questo risultato così sorprendente, controintuitivo, che racchiude il potere dell'astrazione matematica, mi ha spinto a svolgere questa tesi.

Il concetto di decomposizione paradossale di un insieme rispetto all'azione di un gruppo è fondamentale: consiste nel dividere un insieme in due parti; ognuna di queste viene poi suddivisa ulteriormente in un numero finito di pezzi che vengono poi riarrangiati tramite l'azione del gruppo per ottenere l'intero insieme di partenza.

Prendere un grano di sabbia, decomporlo e ottenere tramite isometrie il sole, vuol dire che l'idea intuitiva di volume non può essere applicata a tutti i sottoinsiemi dello spazio. Grazie al *teorema di Tarski* vale anche il viceversa: se non è possibile costruire decomposizioni paradossali di un dato insieme rispetto ad un dato gruppo, allora tale insieme ammette una misura non nulla finitamente additiva e invariante rispetto al gruppo.

(1) Quando esistono decomposizioni paradossali? Rispetto a quali gruppi?

(2) Perchè il paradosso di Banach-Tarski non vale in dimensione 1 e 2?

(3) Sulla retta e sul piano è possibile estendere la misura di Lebesgue in maniera finitamente additiva su tutti i sottoinsiemi?

Si vedrà com'è possibile caratterizzare i gruppi di isometrie, o più in generale quei gruppi che agiscono su un insieme, che non consentono l'esistenza di decomposizioni paradossali dell'insieme su cui agiscono. Infine verrà presentata un'estensione finitamente additiva, definita su tutta l'algebra dei sottoinsiemi della misura di Lebesgue, nel caso di dimensione 1 e 2.

Un po' di storia.

Il paradosso di Banach-Tarski risale al 1924 e fu presentato nell'articolo "*Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents*". Tale risultato si appoggia sulla decomposizione paradossale della superficie sferica, nota come paradosso di Hausdorff, apparso nel 1914 in "*Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen*". Inoltre la dimostrazione della forma forte del paradosso di Banach-Tarski utilizza la generalizzazione del teorema di Schröder-Bernstein che Banach diede nel 1924 nell'articolo "*Un théorème sur les transformations biunivoques*".

La dimostrazione del teorema di Tarski che presenteremo utilizza nella dimostrazione il teorema di Tychonoff, ed è dovuta a Łos e a Ryll-Nardzewski, che nel 1951 pubblicarono l'articolo "*On the applications of Tychonoff's theorem in mathematical proofs*". Tarski invece nell' "*Algebraische Fassung des Massproblems*" del 1938 utilizzò l'induzione transfinita.

Banach sviluppò in "*Sur le problème de la mesure*" (1923) l'idea del teorema di Hanh-Banach, e provò che sulla retta e sul piano era possibile estendere la misura di Lebesgue in maniera finitamente additiva a tutti i sottoinsiemi. Fu poi Von-Neumann in "*Zur allgemeiner Theorie des Masses*" del 1929 a formulare in maniera più astratta i risultati ottenuti da Banach, e iniziò a classificare i gruppi ammissibili.

Struttura della tesi.

Nel paragrafo 1 si richiamano le proprietà di misura astratta e di misura di Lebesgue che verranno poi utilizzate nel seguito. Il paragrafo 2 è dedicato a due importanti esempi di insiemi non misurabili secondo Lebesgue; il primo riguarda una generalizzazione a dimensione arbitraria dell'insieme non misurabile di Vitali, mentre il secondo concerne un insieme non misurabile del piano costruito da Sierpiński. Nel paragrafo 3 viene introdotto il concetto di decomposizione paradossale di un insieme rispetto ad un gruppo e il teorema di Banach-Schröder-Bernstein. I paragrafo 4 e 5 sono dedicati rispettivamente al paradosso di Hausdorff e al paradosso di Banach-Tarski. Il teorema di Tarski, che fornisce l'equivalenza fra l'esistenza di una data misura finitamente additiva e l'assenza di decomposizioni paradossali è presentato nel paragrafo 6. Il paragrafo 7 è dedicato ai gruppi ammissibili e alla costruzione di particolari estensioni a tutto lo spazio della misura di Lebesgue. Infine il paragrafo 8 presenta delle caratterizzazioni dell'ammissibilità.

Indice

1 Misura e misura di Lebesgue

Ricorderemo ora le principali nozioni di teoria della misura e della misura di Lebesgue che verranno utilizzate nel seguito.

Definizione 1. *Sia X un insieme qualsiasi. Una funzione $\mu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ è detta* misura (esterna) su X *se per ogni $A, B, A_i \subseteq X$ valgono:*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $\mu(A) \leq \mu(B)$ *se* $A \subseteq B$ *[isotonia]*

(3) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ *[σ-sub-additività]*

Dalle proprietà (3), (1) segue direttamente

(4) $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

ovvero la sub-addittività finita.
Presa $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $A \subseteq X$, la definizione di misura permette di definire anche l'*integrale di f su A*

$$\int_A f \, d\mu$$

come segue:

- se f è positiva su A

$$\int_A f d\mu := \int_0^{\infty} \mu(A \cap \{f > t\}) \, dt$$

- se f è a valori qualsiasi su A viene definito come

$$\int_A f d\mu := \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

  dove f^+ ed f^- sono rispettivamente la parte positiva e negativa di f, e almeno una delle due ha integrale finito.

Per ogni insieme $A \subseteq X$, denotata con χ_A la funzione caratteristica di A, vale che

$$\mu(A) \ = \ \int_X \chi_A \, d\mu \ = \ \int_A 1 \, d\mu$$

Definizione 2. *Un insieme $E \subseteq X$ è detto* di μ-misura nulla *se* $\mu(E) = 0$.

Gli insiemi di misura nulla sono trascurabili sia rispetto al calcolo della misura di un insieme, sia rispetto al calcolo dell'integrale di una funzione, ovvero se $A \subseteq X$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $E \subseteq X$ è di μ-misura nulla, allora

- $\mu(A) \ = \ \mu(A \backslash E) \ = \ \mu(A \cup E)$

- $\int_A f\,d\mu \;=\; \int_{A\cup E} f\,d\mu \;=\; \int_{A\setminus E} f\,d\mu$

Inoltre si dice che $A \overset{q.o.}{=} B$ se $\mu(A\setminus B) = \mu(B\setminus A) = 0$.
La seguente definizione è fondamentale

Definizione 3. *Un insieme $E \subseteq X$ è detto μ-*misurabile*(nel senso di Carathéodory) se per ogni $A \subseteq X$ vale*

$$\mu(A) \;=\; \mu(A\cap E) \;+\; \mu(A\setminus E)$$

La famiglia degli insiemi μ-misurabili è denotata con $\mathcal{M}(\mu)$.

Segue direttamente che μ è **finitamente additiva** (in breve, fin.add.) sugli insiemi misurabili, ovvero se $E_1, E_2 \in \mathcal{M}(\mu)$ sono disgiunti vale

$$\mu(E_1 \cup E_2) \;=\; \mu(E_1) + \mu(E_2)$$

Ricordiamo che $\mathcal{M}(\mu)$ è una σ-algebra di insiemi su cui μ è σ-additiva, ovvero rispettivamente

- $\emptyset, X \in \mathcal{M}(\mu)$ e vale $A\cup B, A\cap B, A\setminus B \in \mathcal{M}(\mu)$ se $A, B \in \mathcal{M}(\mu)$
- $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$

Alcuni esempi di misure sono i seguenti:

- **Misura concentrata.** Sia X un insieme non vuoto e si fissi $x_0 \in X$. La misura concentrata in x_0 è definita e denotata da $\delta_{x_0}(A) := 1$ se $x_0 \in A$, e $\delta_{x_0}(A) := 0$ altrimenti. Rispetto a questa misura tutti gli insiemi sono misurabili.

- **Misura del conteggio.** Sia $X = \mathbb{N}$ [1]. La misura μ del conteggio è definita da $\mu(A) := \sharp A$. Anche rispetto a questa misura tutti gli insiemi sono misurabili.

- **Misura dell'estremo superiore.** Sia X un insieme. La misura μ dell'estremo superiore è definita da $\mu(A) := 1$ se $A \neq \emptyset$, mentre $\mu(A) := 0$ altrimenti. Rispetto a questa misura gli unici insiemi misurabili sono $\emptyset$ e X.

Introduciamo ora la più importante delle misure in $\mathbb{R}^n$, la **misura di Lebesgue n-dimensionale** mis_n. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$; definiamo

$$\mathrm{mis}_n(A) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |R_i| : R_i \text{ n-intervalli con } A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} R_i\}$$

[1] Con il simbolo $\mathbb{N}$ indichiamo l'insieme dei numeri naturali, ovvero $\{0, 1, 2, ..\}$. Sia $n \in \mathbb{N}$ e definiamo $\mathbb{N}_n := \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$.

dove $|R_i|$ è la misura elementare dell'n-intervallo R_i[2]. Elenchiamo le principali proprietà della misura n-dimensionale di Lebesgue che ci serviranno nel seguito:

- mis_n è una misura σ-additiva
- mis_n è invariante per isometrie (e in particolare per traslazioni)
- mis_n è regolare rispetto agli aperti, ovvero per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\text{mis}_n(A) = \inf\{\text{mis}_n(G) : A \subseteq G \text{ aperto}\}$$

- per ogni $M \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, si ha
  - esiste una successione $\{K_i\}_i$ di compatti tali che

$$M \overset{q.o.}{=} \cup K_i \text{ e } M \supset \cup K_i$$

  - esiste una successione $\{G_i\}_i$ di aperti tali che

$$M \overset{q.o.}{=} \cap G_i \text{ e } M \subset \cap G_i$$

- la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue (cioè rispetto a mis_n) è denotata con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Tutti i boreliani sono misurabili rispetto a mis_n perchè lo sono gli n-intervalli.

  Nel seguito quando si parlerà di insiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ si intenderà che siano misurabili rispetto alla misura di Lebesgue.

[2]Un n-intervallo è un prodotto cartesiano di n intervalli di $\mathbb{R}$; il prodotto delle ampiezze di questi n intervalli è la misura elementare dell'n-intervallo.

2 Insiemi non misurabili: Vitali e Sierpiński

Il primo esempio di insieme non misurabile secondo Lebesgue fu dato da Vitali nel 1905. Presentiamo una generalizzazione di tale insieme al caso di dimensione arbitraria.

Teorema 1. *Ogni insieme di misura non nulla contiene sottoinsiemi non misurabili.*

Dimostrazione. Supponiamo di avere $C \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\mathrm{mis}_n(C) > 0$; scegliamo $r > 0$ tale che posto $A := C \cap B_r(0)$ si abbia $\mathrm{mis}_n(A) > 0$. Su A mettiamo una relazione di equivalenza

$$x \sim y \text{ se } x - y \in \mathbb{Q}^n$$

Grazie all'assioma della scelta esiste un insieme S che ha un solo elemento di ogni classe di equivalenza. Ora dimostriamo che S non è misurabile. Posto

$$Q := \{q \in \mathbb{Q}^n \text{ t.c. } \parallel q \parallel < 2r\}$$

si ha

$$A \subseteq \cup_{q \in Q}(S + q) \subseteq B_{3r}(0) \tag{1}$$

$$(S + q) \cap (S + q') = \emptyset \text{ se } q \neq q' \tag{2}$$

Grazie all'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue, per ogni $q \in Q$

$$\mathrm{mis}_n(S + q) = \mathrm{mis}_n(S).$$

Se per assurdo S fosse misurabile, allora i traslati $S + q$ con $q \in Q$ sarebbero misurabili. Quindi per l'isotonia della misura da (1) seguirebbe

$$0 < \mathrm{mis}_n(A) \leq \mathrm{mis}_n[\cup_{q \in Q}(S + q)] \leq \mathrm{mis}_n(B_{3r}(0)) < +\infty.$$

Perciò dalla σ-addittività per gli insiemi misurabili e da (2) seguirebbe

$$\mathrm{mis}_n[\cup_{q \in Q}(S + q)] = \sum_{q \in Q} \mathrm{mis}_n(S + q) = (+\infty)\mathrm{mis}_n(S).$$

Assurdo. $\square$

Diverso è invece l'esempio di insieme non misurabile presentato da Sierpiński nel 1920 in *Sur un problème concernant les ensembles mesurable superficiellement.*

Teorema 2 (Sierpiński)**.** *Esiste un insieme di* $\mathbb{R}^2$ *non misurabile che interseca ogni retta del piano in al più due punti.*

Per la dimostrazione di questo teorema utilizzeremo dei teoremi riguardanti i numeri ordinali e cardinali (vedi Appendice A).

Dimostrazione. Denotiamo con Ω_0 il più piccolo ordinale avente la cardinalità del continuo. Grazie al teorema del buon ordinamento di Zermelo (vedi Appendice A), questo ordinale Ω_0 esiste, ed è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

(3) $\operatorname{card}(\{\alpha \text{ ordinale } : \alpha < \Omega_0\}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$

(4) $\operatorname{card}(\{\beta \text{ ordinale } : \beta < \alpha\}) < \operatorname{card}(\mathbb{R})$ per ogni ordinale $\alpha < \Omega_0$.

Denotiamo con $\mathcal{C}$ la famiglia dei chiusi del piano $\mathbb{R}^2$ di misura non nulla. La famiglia $\mathcal{C}$ ha la cardinalità del continuo (Vedi Appendice A); può quindi essere parametrizzata usando gli ordinali più piccoli di Ω_0. Perciò esiste una biiezione $\alpha \mapsto F_\alpha$ dagli ordinali più piccoli di Ω_0 alla famiglia $\mathcal{C}$ tale che

$$\mathcal{C} = \{F_\alpha : \alpha < \Omega_0\} \tag{5}$$

1^0 *passo*: "Costruzione dell'insieme E". Costruiremo E come l'insieme di punti $q_\alpha \in F_\alpha$ che verranno definiti per induzione transfinita per ogni ordinale $\alpha < \Omega_0$. Poniamo q_0 un punto di F_0. Sia ora $0 < \alpha < \Omega_0$ e supponiamo di aver costruito tutti i punti q_i dell'insieme E con ordinale $i < \alpha$; definiamo l'insieme

$$\mathcal{G}_\alpha := \text{l'insieme delle rette passanti per punti distinti } q_i, q_j \text{ con } i < j < \alpha.$$

Dato che $\alpha < \Omega_0$ da (4) segue che $\operatorname{card}(\mathcal{G}_\alpha) < \operatorname{card}(\mathbb{R})$; quindi esiste una retta D_0 del piano che non è parallela a nessuna delle rette appartenenti a $\mathcal{G}_\alpha$. Inoltre poichè F_α ha misura positiva, esiste una retta D parallela a D_0 tale che l'intersezione $F_\alpha \cap D$ abbia misura unidimensionale non nulla[3].

Essendo $\operatorname{card}(\mathcal{G}_\alpha) < \operatorname{card}(\mathbb{R})$ e $\operatorname{card}(D) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$, dal fatto che D non è parallela a nessuna delle rette di $\mathcal{G}_\alpha$ si ha che $\operatorname{card}(D \cap \cup\mathcal{G}_\alpha) < \operatorname{card}(\mathbb{R})$; perciò tra i punti di $F_\alpha \cap D$ esiste almeno un punto q_α che non appartiene a nessuna retta di $\mathcal{G}_\alpha$.

2^0 *passo*: "Non misurabilità di E". Dalla costruzione di E seguono direttamente questi due fatti:

- E ha al più due punti in comune con ogni retta,

[3] L'esistenza di D è assicurata dal principio di Cavalieri.

- E interseca ogni chiuso appartenente a $\mathcal{C}$ in almeno un punto.

Ora è immediato dedurre che E non è misurabile. Infatti se fosse misurabile potremmo distinguere questi due casi.

- 1^0 caso. Se $\mathbb{R}^2 \backslash E$ avesse misura positiva allora esisterebbe un chiuso di misura positiva in esso contenuto. Assurdo perchè ogni chiuso di misura non nulla interseca E.

- 2^0 caso. Se E avesse misura positiva esisterebbe un chiuso di misura positiva in esso contenuto, e quindi esisterebbe una retta la cui sezione di E rispetto a quella retta ha misura positiva. Assurdo perchè E intersecca ogni retta del piano in al più due punti.

□

Siamo ora in grado di costruire, a partire da E, una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con grafico non misurabile.

Teorema 3. *Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con grafico non misurabile.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ costruito sopra, e definiamo per $x \in \mathbb{R}$

$$Ex := \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$$

Definiamo quindi le due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$f(x) := \begin{cases} \max(Ex) & \text{se } Ex \neq \emptyset \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} \min(Ex) & \text{se } Ex \neq \emptyset \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'unione dei grafici di f e g differisce da E per un insieme misurabile dell'asse delle x; perciò non è misurabile. Quindi almeno uno dei due grafici non è misurabile. □

Tale risultato può essere rafforzato.

Teorema 4. *Esiste una biiezione da $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$ con grafico non misurabile.*

Dimostrazione. Dal teorema precedente segue direttamente che esiste una funzione iniettiva $f : A \to \mathbb{R}$, dove $A \subset \mathbb{R}$, con grafico non misurabile. Distinguiamo due casi.

1^0 caso: sia $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(\mathbb{R})$. Essendo f iniettiva $\mathrm{card}(f(A)) < \mathrm{card}(\mathbb{R})$, quindi $\mathrm{card}(\mathbb{R}\backslash A) = \mathrm{card}(\mathbb{R}\backslash f(A)) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ [4]. Esiste perciò una biiezione $g : \mathbb{R}\backslash A \to \mathbb{R}\backslash f(A)$. Definiamo allora $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

[4] Vedi Proposizione 14 in Appendice A.

Questa funzione h è evidentemente una biiezione da $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$. Il grafico di h non è misurabile, poichè se lo fosse, allora per il principio di Cavalieri avrebbe misura nulla, da cui seguirebbe che anche il grafico di f avrebbe misura nulla. Assurdo.

2^0 caso: sia $\text{card}(A) = \text{card}(\mathbb{R})$. Ripartiamo A in due sottoinsiemi A_1, A_2 aventi la cardinalità del continuo. Allora almeno una delle due restrizioni f_{A_1}, f_{A_2} ha grafico non misurabile. Supponiamo che sia f_{A_1} ad avere grafico non misurabile. Allora $\mathbb{R}\backslash A_1, \mathbb{R}\backslash f(A_1)$ hanno la cardinalità del continuo. Quindi possiamo procedere come nel primo caso. $\square$

3 Decomposizioni paradossali

In questo capitolo introdurremo il concetto di decomposizione paradossale, daremo alcuni esempi, e inizieremo a vederne la relazione con l'esistenza di certe misure.

Iniziamo ricordando il concetto di azione di un gruppo su un insieme.

Definizione 4. *Sia G un gruppo e X un insieme; l'*azione (a sinistra) *di G su X è un omomorfismo fra G e* $\mathrm{Sym}(X)$[5]*, ovvero ad ogni $g \in G$ è si associa una biiezione di X sempre indicata con g, in modo tale che per ogni $x \in X$ e per ogni $g, h \in G$ valgano le eguenti proprietà:* $1(x) = x$ *e* $(gh)(x) = g(h(x))$*.*

Lo *stabilizzatore* e l'*orbita* di un elemento $x \in X$ rispetto all'azione di G su X, sono denotati e definiti rispettivamente da

$$\mathrm{stab}_G(x) := \{g \in G : gx = x\} \ \ e \ \ Gx := \{gx : g \in G\}.$$

Si osservi che $\mathrm{stab}_G(x)$ è un sottogruppo di G, e che due orbite distinte sono sottoinsiemi disgiunti di X.

Introduciamo ora il concetto di decomposizione [6].

Definizione 5. *Siano G un gruppo che agisce sull'insieme X, e $A, B \subseteq X$; diciamo che A e B sono* G-equiscomponibili*, indicandolo con $A \sim_G B$ se è possibile partizionare A e B in un egual numero finito di pezzi $\{A_i\}_{i \in I} \subset A, \{B_i\}_{i \in I} \subset B$, ed esistono $\{\tau_i\}_{i \in I} \subset G$ tali che*

$$\forall i \in I \ \ \tau_i(A_i) = B_i.$$

Definizione 6. *Siano G gruppo che agisce su un insieme $X \neq \emptyset$ e $\emptyset \neq E \subset X$; si dice che E* ammette una G-decomposizione paradossale*, oppure che E* è paradossale rispetto a G*, se esistono $A, B \subset E$ disgiunti tali che*

$$A \sim_G E \sim_G B.$$

Nel caso in cui $X = G$ e l'azione di G su se stesso è data dalla moltiplicazione a sinistra, si dirà semplicemente che G è paradossale.

Notiamo questo fatto elementare

Proposizione 1. *Se $E \sim_G E'$ e E ammette una G-decomposizione paradossale, allora anche E' la ammette.*

[5] $\mathrm{Sym}(X)$ denota l'insieme delle biiezioni da X su X.

[6] L'equivalenza per decomposizione utilizzata al giorno d'oggi è a livello insiemistico. L'equivalenza di due figure per scomposizione era già nota ai Greci, i quali ammettevano solo poligoni per la scomposizione e non ne consideravano il bordo. Esiste però una relazione fra i due tipi di equivalenza per decomposizione. Per maggiori dettagli vedere l'appendice B.

Presentiamo ora un risultato di paradossalità per i gruppi che utilizzeremo nel seguito.

Teorema 5. *Un gruppo libero F di rango 2 (cioè un gruppo libero generato da due suoi elementi) è paradossale.*

Dimostrazione. Siano ρ, τ generatori liberi di F, e definiamo $W(\rho), W(\rho^{-1}), W(\tau)$, $W(\tau^{-1})$ come i sottoinsiemi delle parole "irriducibili"[7] di F che iniziano a sinistra rispettivamente con $\rho, \rho^{-1}, \tau, \tau^{-1}$; allora si ha che tali insiemi sono ovviamente disgiunti, e $W(\tau) \cup \tau W(\tau^{-1}) = F = W(\rho) \cup \rho W(\rho^{-1})$ è la decomposizione paradossale voluta. □

Vediamo ora come sia possibile trasportare la paradossalità di un gruppo sull'insieme su cui agisce, e viceversa.

Definizione 7. *Diciamo che un gruppo G agisce su un insieme X* senza punti fissi non banali *se per ogni $g \in G, g \neq 1$*

$$g(x) \neq x \quad \textit{per ogni } x \in X.$$

Possiamo quindi enunciare la seguente

Proposizione 2. *Sia G un gruppo paradossale che agisce su un insieme X senza punti fissi non banali; allora X ammette una G-decomposizione paradossale.*

Dimostrazione. Siano $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m \subset G$, $g_1, .., g_n, h_1, ..h_m \in G$ che rendono G paradossale. Grazie all'assioma della scelta costruiamo l'insieme M che ha un punto in comune con ogni G-orbita; allora gli insiemi $A_i^* := \{g(M) : g \in A_i\}, B_j^* := \{g(M) : g \in B_j\}$ sono una partizione di X perchè $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$ sono una partizione di G, che agisce su X senza punti fissi non banali. Allora

$$\bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i^*) = X = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j^*)$$

seguono direttamente dalle analoghe equazioni in G. □

L'inversa della precedente proposizione è invece valida per ogni tipo di azione.

Proposizione 3. *Se X ammette una G-decomposizione paradossale, allora G è paradossale.*

[7] Una parola è detta irriducibile se non contiene fattori del tipo $\sigma\sigma^{-1}$ o $\sigma^{-1}\sigma$. Un gruppo si dice libero se due parole sono uguali ssse contengono gli stessi fattori nello stesso ordine. Nel caso di " semigruppo libero" non si terrà conto dell'inverso.

Dimostrazione. Fissiamo $\bar{x} \in X$ e $G\bar{x}$ la sua orbita. Il fatto che X ammetta una G-decomposizione paradossale implica l'esistenza di $A_1, .., A_n, B_1, ..B_m \subset X$ disgiunti e $g_1, .., g_n, h_1, .., h_m \in G$ tali che $\cup_{i=1}^n g_i A_i = X = \cup_{j=1}^m h_j B_j$. Definiamo per ogni $i = 1, .., n$ e per ogni $j = 1, .., m$

$$\widetilde{A}_i := \{g \in G : g(\bar{x}) \in A_i\} \ \ e \ \ \widetilde{B}_j := \{g \in G : g(\bar{x}) \in B_j\}$$

Senza perdere di generalità supponiamo ogni $\widetilde{A}, \widetilde{B}_j$ sia non vuoto. Si vede facilmente che tali famiglie offrono una decomposizione paradossale del gruppo G; infatti gli insiemi $\widetilde{A}_i$ sono tra loro disgiunti, così pure gli insiemi $\widetilde{B}_j$, e inoltre vale

$$\bigcup_{i=1}^{n} g_i \widetilde{A}_i = G = \bigcup_{j=1}^{m} h_j \widetilde{B}_j.$$

□

Dalla proposizione 2 segue direttamente che

Proposizione 4. *Ogni gruppo che contiene un semigruppo libero F di rango 2 ammette una F-decomposizione paradossale.*

Presentiamo ora un fatto interessante riguardo agli insiemi infiniti

Proposizione 5. *Se X è un insieme infinito, allora X ammette una decomposizione paradossale rispetto al gruppo delle biiezioni da X in X*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto il seguente fatto elementare: preso un insieme X, qualunque siano gli insiemi $A, B \subset X$ disgiunti tali che $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ e $\mathrm{card}(X \backslash A) = \mathrm{card}(X \backslash B)$, esiste una biiezione di X in X che manda A in B. Sia quindi X un insieme infinito e definiamo $\alpha := \mathrm{card}(X)$. Allora esiste una partizione A, B di X tale che $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) = \alpha$ [8]. Analogamente è possibile prendere A_1, A_2 e B_1, B_2 partizioni di A e B rispettivamente in modo che gli insiemi A_1, A_2, B_1, B_2 abbiano tutti cardinalità α. Grazie all'osservazione fatta all'inizio esistono delle biiezioni f_1, f_2, g_1, g_2 di X in X tali che $f_1(A_1) = A$, $f_2(A_2) = B$, $g_1(B_1) = A$, $g_2(B_2) = B$. Si ha quindi la decomposizione paradossale voluta.

□

Presentiamo ora un esempio molto interessante di una decomposizione paradossale di un insieme piano tramite isometrie.

Teorema 6. ***(Paradosso di Sierpiński-Mazurkiewicz)*** *Esiste un insieme di $\mathbb{R}^2$ che ammette una decomposizione paradossale rispetto al gruppo delle isometrie del piano.*

L'esistenza di un tale insieme segue direttamente dal seguente lemma.

[8] Vedi appendice A.

Lemma 1. *Esistono due isometrie τ, ρ del piano che generano liberamente un semigruppo F; in altre parole e più generalmente, se w_1, w_2 sono parole di F che iniziano a sinistra rispettivamente con τ e ρ, allora $w_1((0,0)) \neq w_2((0,0))$.*

Dimostrazione. Il numero complesso $u := e^i$ è trascendente[9]. Definiamo le "isometrie piane" $\tau(z) := z + 1$ e $\rho(z) := uz$. Proviamo che queste due isometrie soddisfano quanto richiesto dal lemma

Dato che $\rho(0) = 0$, possiamo assumere

$$w_1 = \tau^{j_1}\rho^{j_2}\cdots\tau^{j_m} \quad j_1, .., j_m \in \mathbb{N}_1 \quad m \geq 1$$

$$w_2 = \rho^{k_1}\tau^{k_2}\cdots\tau^{k_l} \quad k_1, .., k_l \in \mathbb{N}_1 \quad l \geq 1 \text{ oppure } w_2 = \rho^{k_1}$$

Allora risulta

$$\begin{aligned} w_1(0) &= \tau^{j_1}\rho^{j_2}\cdots\tau^{j_m}(0) \\ &= \tau^{j_1}\rho^{j_2}\cdots\rho^{j_{m-1}}(j_m) \\ &= \tau^{j_1}\rho^{j_2}\cdots\tau^{j_{m-2}}(j_m u^{j_{m-1}}) \\ &= \tau^{j_1}\rho^{j_2}\cdots\rho^{j_{m-3}}(j_m u^{j_{m-1}} + j_{m-2}) \\ &= \cdots \\ &= j_1 + j_3 u^{j_2} + j_5 u^{j_2+j_4} + \cdots + j_m u^{j_{m-1}+j_{m-3}+\cdots+j_2} \end{aligned}$$

$$w_2(0) = k_2 u^{k_1} + k_4 u^{k_1+k_3} + \cdots + k_l u^{k_{l-1}+\cdots+k_1} \; [= 0 \text{ se } w_2 = \rho^{k_1}]$$

e se per assurdo si avesse che $w_1(0) = w_2(0)$, allora questo contradirebbe il fatto che u è trascendente. □

Dimostrazione del teorema. Siano $\tau(z) = z + 1$ e $\rho(z) = e^i z$ come nella dimostrazione precedente. Abbiamo che l'F-orbita di $\{(0,0)\}$ è

$$E = \{a_0 + a_1 e^i + \cdots + a_n e^{ni} \; : \; a_j, n \in \mathbb{N}\}$$

allora gli insiemi

$$\rho(E) = \{a_1 e^i + \cdots + a_n e^{ni} \; : \; a_j, n \in \mathbb{N}\}$$

$$\tau(E) = \{a_0 + a_1 e^i + \cdots + a_n e^{ni} \; : \; a_j, n \in \mathbb{N}, a_0 \neq 0\}$$

forniscono una decomposizione paradossale di E [10]. □

Concludiamo il capitolo presentando un risultato molto potente.

[9] Vedi teorema di Hermite-Lindemann in appendice A.

[10] Notiamo che la numerabilità di E fa sì che la sua decomposizione paradossale non implichi nessuna conseguenza a livello di misura di Lebesgue, dato che si ottiene semplicemente: $2 \cdot 0 = 0$.

Teorema 7. ***(Teorema di Banach-Schröder-Bernstein)*** *Siano G gruppo che agisce su X e siano $A, B \subset X$. Se esistono $B_1 \subset B$ e $A_1 \subset A$ tali che $A \sim_G B_1$ e $B \sim_G A_1$, allora $A \sim_G B$.*

Dimostrazione. Si vede facilmente che la relazione $\sim_G$ soddisfa le seguenti due proprietà:

- se $A \sim B$ allora esiste una biiezione $g : A \to B$ t.c. $C \sim g(C)$ $\forall C \subset A$
- se $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$ e $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$, allora $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$

Nel resto della dimostrazione assumeremo solamente che la relazione $\sim$ soddisfi le due condizioni precedenti.

Siano quindi $f : A \to B_1$ e $g : B \to A_1$ dove $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$ sono le biiezioni garantite dalla prima condizione; l'idea è quella di usare tali biiezioni per partizionare A, B entrambi in due pezzi fra loro equivalenti, e poi utilizzare la seconda condizione per concludere. Sia $C_0 := A \backslash A_1$, definiamo ricorsivamente $C_{n+1} := g^{-1} f(C_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}_1$, e consideriamo $C := \cup_{i=1}^{\infty} C_n$. Allora si vede che $g(A \backslash C) = B \backslash f(C)$, e quindi $(A \backslash C) \cup C \sim B \backslash f(C) \cup f(C)$ come voluto. □

Due fatti fondamentali che seguono direttamente dal teorema di Banach-Schröder-Bernstein sono le seguenti proposizioni.

Proposizione 6. *$E \subset X$ ammette una G-decomposizione paradossale ssse esiste una partizione A, B di E tale che $A \sim_G E \sim_G B$.*

Dimostrazione. Se E ammette una G-decomposizione paradossale, allora esistono due sottoinsiemi disgiunti A, B di E tali che $A \sim_G E \sim_G B$; dato che $E \sim B \subset E \backslash A \subset E$, dal teorema precedente si ha subito quanto voluto. □

Proposizione 7. *Se $A \subset C$ e $A \sim_G C$, allora per ogni B tale che $A \subset B \subset C$, allora $A \sim_G B$.*

Dimostrazione. $C \sim_G A \subset B$, e $B \sim_G B \subset C$, da cui dal teorema di Banach-Schröder-Bernstein segue il risultato voluto. □

4 Il paradosso di Hausdorff

In questo capitolo presenteremo il Paradosso di Hausdorff.

Lemma 2. *Esistono due rotazioni indipendenti* [11] ρ, φ *in* $\mathbb{R}^3$ *attorno ad assi passanti per l'origine. Più in generale, per* $n \geq 3$*, il gruppo delle rotazioni attorno all'origine ha un sottogruppo libero di rango* 2.

Dimostrazione. Siano ρ, φ le rotazioni in senso anti-orario attorno all'asse z e x rispettivamente, di un angolo pari a $arcos\frac{1}{3}$. Allora posso rappresentarle in forma matriciale come

$$\varphi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Mostriamo che nessuna parola w in $\varphi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ è l'identità.

Dato che il coniugio rispetto a φ non cambia il fatto che una parola w equivalga o meno all'identità, possiamo supporre che w inizi a destra con $\varphi^{\pm 1}$. Detta k la lunghezza delle parola w dimostriamo per induzione su k che

($*$) esistono $a, b, c \in \mathbb{N}$ con b non divisibile per 3 tali che $w((1,0,0)) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$.

- 1^0 passo: $k = 1$. In tal caso $w = \varphi^{\pm 1}$; quindi

$$\varphi^{\pm 1}((1,0,0)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm 2\sqrt{2}/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2^0 passo. Supponiamo $w = \varphi^{\pm 1} w'$ o $w = \rho^{\pm 1} w'$ e $w'((1,0,0)) = (a', b'\sqrt{2}, 0)/3^{k-1}$, e che 3 non divida b'. Rispettivamente, otteniamo che

$$w((1,0,0)) = \frac{1}{3^{k-1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b'\sqrt{2} \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} a' \mp 4b' \\ \sqrt{2}(\pm 2a' + b') \\ 3c' \end{pmatrix}$$

[11] Ovvero il sottogruppo da loro generato è libero.

$$w((1,0,0)) = \frac{1}{3^{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b'\sqrt{2} \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} 3a' \\ \sqrt{2}(b' \mp 2c') \\ \pm 4b' + c' \end{pmatrix}.$$

Per mostrare che b, che è rispettivamente $\pm 2a' + b'$, $b' \mp 2c'$ non è mai divisibile per 3, distringuiamo i vari casi.

- se $w = \varphi^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v$, allora $b := b' \pm 2a' = b' \pm 2(3a'')$; dunque 3 non divide b
- se $w = \rho^{\pm 1}\varphi^{\pm 1}v$, allora $b := b' \mp 2c' = b' \mp 2(3c'')$; dunque 3 non divide b
- se $w = \varphi^{\pm 1}\varphi^{\pm 1}v$, allora $b := b' \pm 2a' = b' \pm 2(a'' \mp 4b'') = b' + b'' \pm 2a'' - 9b'' = 2b' - 9b''$; dunque 3 non divide b
- se $w = \rho^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v$, allora $b := b' \mp 2c' = b' \mp 2(\pm 4b'' + c'') = b' - 8b'' \mp 2c'' = b' - 9b'' + (b'' \mp 2c'') = 2b' - 9b''$; dunque 3 non divide b

Ora da $(*)$ segue immediatamente che $w((1,0,0)) \neq (1,0,0)$, e quindi si ha quanto richiesto. $\square$

Ecco quindi il risultato noto come paradosso di Hausdorff.

Teorema 8. ***(Paradosso di Hausdorff)*** *A meno di un insieme numerabile la superficie sferica ammette una decomposizione paradossale rispetto al gruppo delle rotazioni attorno al suo centro.*

Dimostrazione. Sia F il sottogruppo generato da φ, ρ del lemma di sopra, e sia D l'insieme dei punti della superficie sferica fissati da qualche elemento di F. Denotata con S la superficie sferica, sull'insieme $S \backslash D$ l'azione di F è evidentemente senza punti fissi. Quindi applicando la proposizione 2 si ha direttamente quanto voluto.

$\square$

5 Il paradosso di Banach-Tarski

Presentiamo ora la più spettacolare delle decomposizioni paradossali, il paradosso di Banach-Tarski.

Teorema 9. ***(Paradosso di Banach-Tarski)*** *Ogni sfera piena ammette una decomposizione paradossale rispetto al gruppo delle isometrie. D'altra parte ogni superficie sferica ammette una decomposizione paradossale rispetto al gruppo delle rotazioni attorno al suo centro.*

Dimostrazione. Indichiamo con S la superficie sferica.

1^0 passo: *per ogni sottoinsieme D numerabile vale $S \backslash D \sim S$.*

Sia l una retta per il centro della sfera che non interseca nessun punto di D. Dato che D è numerabile, esiste una rotazione ρ attorno ad l che ha ordine infinito [12]. Definiamo $\widetilde{D} := \cup_{n \in \mathbb{N}} \rho^n(D)$. Allora essendo $S = \widetilde{D} \cup S \backslash \widetilde{D}$, si ha che

$$S \sim \rho(\widetilde{D}) \cup S \backslash \widetilde{D} = S \backslash D$$

2^0 passo: *decomposizione della sfera piena B.*

Dal paradosso di Hausdorff e dal passo precedente abbiamo che la superficie sferica ammette una decomposizione paradossale rispetto al gruppo delle rotazioni attorno al suo centro. Per quanto riguarda le sfere piene, l'idea è quella di trasportare la decomposizione paradossale della superficie sferica alla sfera piena aggiungendo i raggi, e poi assorbire l'origine [13]. Inoltre dato che tale decomposizione non dipende nè dal raggio della sfera, nè dal suo centro, ciò vale per ogni sfera solida di $\mathbb{R}^3$.

Sia quindi B la sfera solida unitaria centrata nell'origine; grazie alla corrispondenza $P \mapsto \{\alpha P : 0 < \alpha \leq 1\}$ otteniamo una decomposizione paradossale per $B \backslash \{(0,0)\}$; mostriamo ora che $B \backslash \{(0,0)\} \sim B$: sia l una retta per $(0, 0, \frac{1}{2})$ ma non per l'origine, e sia ρ una rotazione attorno ad l di ordine infinito. Si definisca $D := \{\rho^n((0,0)) : n \in \mathbb{N}\}$, e si osservi che

$$B = B \backslash D \cup D \sim B \backslash D \cup \rho(D) = B \backslash \{(0,0)\}$$

Otteniamo quindi una decomposizione paradossale della sfera piena. □

Lemma 3. *Siano A una sfera di $\mathbb{R}^n$ e B un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste $C \subset A$ tale che $C \sim B$.*

[12] Indichiamo con A l'insieme degli angoli θ per cui esiste $P \in D, n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi(P) \in D$, dove φ è la rotazione di angolo $n\theta$ attorno ad l; essendo D numerabile, anche A lo sarà; scegliamo quindi un angolo $\theta \notin A$, e sia ρ la rotazione di angolo θ attoro ad l; allora ρ soddisfa a quanto voluto, poichè se per assurdo esistessero $n \leq m \in \mathbb{N}$ tali che $\rho^n(D) \cap \rho^m(D) \neq \emptyset$, allora $\rho^{m-n}(D) \cap D \neq \emptyset$. Assurdo.

[13] Allo stesso modo si può ottenere una decomposizione paradossale di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo semirette.

Dimostrazione. Ricordiamo che il diametro di un insieme è l'estremo superiore delle distanze fra due suoi elementi. B è limitato e quindi può essere partizionato in un numero finito di insiemi $\{B_i\}_{i=1}^m$ ognuno avente diametro minore del diametro di A. Esistono inoltre $v_1, .., v_m, x_1, .., x_m \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$B_i + v_i \subset A + x_i \text{ per ogni } i = 1, .., m$$

$$A_i + x_i \cap A_j + x_j = \emptyset \text{ se } i \neq j.$$

Allora il paradosso di Banach-Tarski iterato più volte permette di affermare che

$$A \sim \bigcup_{i=1}^m A_i + x_i.$$

Si ottiene quindi il risultato voluto. □

Segue poi direttamente il risultato più sorprendente.

Teorema 10. ***(Paradosso di Banach-Tarski - Forma forte)*** *Siano $A, B \subset \mathbb{R}^3$ insiemi limitati con interno non vuoto. Allora $A \sim B$ rispetto al gruppo delle isometrie.*

Dimostrazione. Siano F, G sfere solide contenute rispettivamente in A e B; dalla limitatezza di A, B segue che esiste una sfera solida D che li contiene entrambi; dal lemma precedente abbiamo che $F \sim D \sim G$ rispetto al gruppo delle isometrie, e quindi dal corollario 2 segue direttamente quanto voluto. □

Dato che la decomposizione paradossale che porta al paradosso di Banach-Tarski dipende dalla presenza di un gruppo libero contenuto nel gruppo delle rotazioni della superficie sferica, e che quest'ultimo è contenuto in ogni gruppo di rotazioni della superficie sferica in $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 3$, non stupisce che il paradosso abbia degli analoghi in dimensioni più alte. Il problema di questa generalizzazione sta nel fatto che in dimensione più alta l'insieme dei punti fissi di un'isometria cresce notevolmente. Nonostante questa piccola complicazione possiamo dimostrare direttamente il seguente risultato, che generalizza il paradosso di Banach-Tarski a dimensione arbitraria:

Teorema 11. ***(Paradosso di Banach-Tarski per $n \geq 3$)*** *Sia $n \geq 3$; allora*

- *ogni superficie sferica in $\mathbb{R}^n$ è paradossale rispetto al gruppo delle rotazioni attorno al suo centro*
- *ogni sfera piena in $\mathbb{R}^n$ è paradossale rispetto al gruppo delle isometrie, così come $\mathbb{R}^n$ stesso*
- *ogni coppia di insiemi limitati di $\mathbb{R}^n$ con interno non vuoto è equidecomponibile*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n; per $n = 3$ è già stato provato; supponiamo quindi che il teorema sia vero per $\mathbb{R}^n$, e consideriamo $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m \subset S^{n-1}$ e $\{\sigma_i\}_{i=1}^n, \{\tau_j\}_{j=1}^m \in SO_n$ che danno la decomposizione paradossale di S^{n-1} rispetto al gruppo delle rotazioni attoro all'origine; definiamo $\{A_i^*\}_{i=1}^n, \{B_j^*\}_{j=1}^m \subset S^n$ partizione di $S^n \backslash (0, .., \pm 1)$ ponendo $(x_1, .., x_n, z)$ in A_i^* o in B_j^* a seconda che $(x_1, .., x_n)/|(x_1, .., x_n)|$ stia in A_i, B_j. Estendiamo quindi le rotazioni $\{\sigma_i\}_{i=1}^n, \{\tau_j\}_{j=1}^m$ a $\{\sigma_i^*\}_{i=1}^n, \{\tau_j^*\}_{j=1}^m$ fissando il nuovo asse. Allora $\{A_i^*\}_{i=1}^n, \{B_j^*\}_{j=1}^m, \{\sigma_i^*\}_{i=1}^n, \{\tau_j^*\}_{j=1}^m$ costituiscono una scomposizione paradossale di $S^n \backslash (0, .., \pm 1)$. Scelta quindi una rotazione 2-dimensionale di ordine infinito, è possibile utilizzarla per assorbire i due poli, ottenendo $S^n \sim S^n \backslash (0, .., \pm 1)$.

Il resto del teorema segue esattamente come nel caso tridimensionale. □

É ovvio che i pezzi utilizzati nella decomposizione della superficie sferica non possono essere Lebesgue-misurabili. Esiste però una categoria di insiemi che sono molto legati agli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

Definizione 8. *Un insieme* $A \subset \mathbb{R}^n$ *è detto* magro *o* di prima categoria *se è unione numerabile di insiemi aventi chiusura senza punti interni.*

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ *è detto avere la* Proprietà di Baire *se esiste un boreliano* $B \subset \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

è magro.

Un problema aperto è il seguente

Problema di Marczewski. La superficie sferica ammette una decomposizione paradossale rispetto al gruppo delle rotazioni attorno al suo centro in cui ogni pezzo utilizzato per la decomposizione ha la Proprietà di Baire?

Vedremo in seguito come una risposta negativa (nel caso di dimensione 2 e 1 [14]) a questo problema possa essere data mostrando l'esistenza di una certa misura.

[14]Nel caso di dimensione maggiore è ancora aperto.

6 Teorema di Tarski

Presentiamo il fondamentale Teorema di Tarski, che fornisce l'equivalenza fra l'esistenza di certe misure e l'assenza di decomposizioni paradossali.

Innanzitutto vediamo come l'insieme non misurabile presentato da Vitali permette di negare l'esistenza di una certa misura.

Teorema 12. *Non esiste una misura σ-additiva e invariante per traslazioni definita su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ che normalizza $[0,1]^n$.*

Dimostrazione. Infatti se una tale misura μ esistesse in un generico $\mathbb{R}^n$, allora sarebbe possibile costruire una misura λ su $\mathcal{P}([0,1])$ σ-addittiva e invariante per traslazioni modulo 1 come $\lambda(A) := \mu(A \times [0,1]^{n-1})$, e si avrebbe $\lambda([0,1]) = 1$. Ma una tale misura non può esistere a causa dell'esistenza dell'insieme di Vitali. □

Definizione 9. *Sia X un insieme e $E \subset X$. Sia G un gruppo che agisce su X. E è detto G-trascurabile se $\mu(E) = 0$ per ogni $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ misura finitamente additiva, G-invariante e finita su E.*

Proposizione 8. *Se E ammette una G-decomposizione paradossale, allora E è G-trascurabile.*

Dimostrazione. Sia μ è una misura su $\mathcal{P}(X)$ finitamente additiva, G-invariante. Siano inoltre $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m \subset X$, $g_1, .., g_n, ..h_1, ..h_m \in G$ che rendono E paradossale rispetto a G. Allora

$$\begin{aligned} \mu(E) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu(g_i(A_i)) + \sum_{j=1}^{m} \mu(h_j(B_j)) \\ &\geq \mu(\bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i)) + \mu(\bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j)) \\ &= \mu(E) + \mu(E) = 2\mu(E) \qquad (1) \end{aligned}$$

e questo implica $\mu(E) = 0$, perchè $\mu(E) \neq +\infty$. □

Teorema 13. *La superficie sferica è trascurabile rispetto al gruppo delle rotazioni attorno al suo centro.*

Dimostrazione. Siano A, B una partizione della superficie sferica S tali che $A \sim S \sim B$, come garantito dal paradosso di Banach-Tarski. Sia quindi $\mu : \mathcal{P}(S) \to [0, +\infty]$ misura finitamente additiva e invariante per isometrie con $\mu(S)$ finito; si ha che

$$\mu(S) = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = 2\mu(S)$$

da cui segue $\mu(S) = 0$ come voluto. □

Quindi non esiste nessuna misura finitamente additiva invariante per isometrie su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ che normalizzi il cubo per $n \geq 3$. Infatti è sufficiente provare la tesi per $n = 3$, dato che per $n > 3$, una misura μ finitamente additiva invariante per rotazioni su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ che normalizza il cubo unitario ne induce una λ con le stesse proprietà su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ definita come $\lambda(A) := \mu(A \times [0,1]^{n-3})$.

Sia quindi μ una misura finitamente additiva invariante per rotazioni su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ che normalizzi il cubo unitario; allora per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ $\mu(\{x\}) = 0$, altrimenti $\mu([0,1]) = +\infty$; inoltre l'invarianza per traslazioni implica che la misura di ogni cubo è finita e non nulla, e quindi l'isotonia mi dice che $0 < \mu(S^3) < +\infty$, dove con S^3 si indica la superficie sferica in $\mathbb{R}^4$. Possiamo quindi definire una misura ν su $\mathcal{P}(S^2)$, dove S^2 indica la superficie sferica in $\mathbb{R}^3$, aggiungendo i raggi, ovvero

$$\forall A \subset S^2 \;\; \nu(A) := \mu(\{\alpha P \; : P \in A, 0 < \alpha \leq 1\})$$

e dato che $\mu(\{0\}) = 0$ si ha che $0 < \nu(S^2) = \mu(S^3) < +\infty$; inoltre ν risulterà essere una misura finitamente additiva invariante per rotazioni definita su tutti i sottoinsiemi della superficie sferica. Assurdo perchè quest'ultima è trascurabile rispetto al gruppo delle rotazioni attorno al suo centro.

Definizione 10. *Sia G gruppo che agisce sull'insieme X. Estendiamo G e l'azione di G da X a $X^* := X \times \mathbb{N}$, definendo un nuovo gruppo $G^* := \{(g, \varphi) : g \in G, \varphi \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})\}$, e l'azione di G^* su X^* mediante*

$$(g, \varphi)(x, n) := (g(x), \varphi(n))$$

Sia $A \subset X^*$; chiameremo *livello n-simo* di A l'insieme $\{x \in X : (x, n) \in A\}$; diremo che l'insieme A è *limitato* se ha un numero finito di livelli non vuoti.

L'azione di G^* estende quella di G, e tratta tutti livelli allo stesso modo. Ovvero si ha

$$E \sim_G E' \Leftrightarrow E \times \{n\} \sim_{G^*} E' \times \{m\}$$

per ogni $E, E' \subset X, n, m \in \mathbb{N}$.

Inoltre l'esistenza di una decomposizione paradossale di un insieme $E \subset X$ rispetto al gruppo G può essere espressa come

$$E \times \{0\} \sim_{G^*} E \times \{0, 1\}$$

Indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme di tutte le classi di equivalenza rispetto alla G^*-equidecomponibilità degli insiemi limitati. In altre parole la classe di equivalenza di un $A \subset X^*$ sarà indicata con $[A]$, e definita da

$$[A] := \text{ la famiglia degli insiemi } B \subset X^* \text{ tali che } B \sim_{G^*} A.$$

Introduciamo ora un'operazione di somma in $\mathcal{S}$.

Definizione 11. *Siano $A, B \subset X^*$ limitati; definiamo $[A]+[B] := [A \cup B']$, dove B' è B traslato sufficientemente in alto da non avere livelli in comune con A.*

Data una somma, si definisce la moltiplicazione di un elemento α di $\mathcal{S}$ per un naturale n come $n\alpha := \overbrace{\alpha + .. + \alpha}^{n\ volte}$. É anche possibile definire un ordine parziale $\leq$ su $\mathcal{S}$ ponendo

$$\alpha \leq \beta \text{ ssse } \exists \lambda \in \mathcal{S} \text{ tale che } \alpha + \lambda = \beta$$

Notiamo che $[A] \leq [B]$ ssse esiste un $B' \subset B$ tale che $A \sim_G B'$.

L'operazione di somma appena introdotta soddisfa le seguenti proprietà:

- commutatività, associatività
- $[\emptyset]$ è l'elemento neutro di tale operazione che sarà indicato con 0.
- per ogni $\alpha, \beta, \lambda \in \mathcal{S}$ e per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ valgono

$$\begin{cases} m(n\alpha) = (mn)\alpha \\ (n+m)\alpha = n\alpha + m\alpha \\ n(\alpha+\beta) = n\alpha + n\beta \\ n\alpha \leq n\beta & \text{se } \alpha \leq \beta \\ \alpha + \lambda \leq \beta + \lambda & \text{se } \alpha \leq \beta. \end{cases}$$

Quindi $(\mathcal{S}, +, \leq)$ è un semigruppo commutativo parzialmente ordinato.

Sarà importante per il seguito il seguente teorema.

Teorema 14. ***(Legge di Cancellazione)*** *Siano $\alpha, \beta \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}$. Se $n\alpha = n\beta$, allora $\alpha = \beta$.*

Da ciò segue direttamente

Corollario 1. *Se $\alpha \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}$ soddisfano $(n+1)\alpha \leq n\alpha$, allora $2\alpha = \alpha$.*

Dimostrazione. Dalla disequazione dell'ipotesi si ha che

$$n\alpha \geq (n+1)\alpha = n\alpha + \alpha \geq (n+1)\alpha + \alpha = n\alpha + 2\alpha$$

ripetendo la quale si arriva ad ottenere che $n\alpha \geq 2n\alpha$; dato che $2n\alpha \geq n\alpha$ si ottiene $n\alpha = n(2\alpha)$, e quindi la legge di cancellazione permette di ottenere quanto voluto. $\square$

La dimostrazione della legge di cancellazione che presenteremo utilizza il teorema di König, presentato nell'appendice B.

Dimostrazione. (della Legge di Cancellazione) $n\alpha = n\beta \Rightarrow \exists E, E' \subset X^*$ limitati e G^*-equiscomponibili t.c. $E = \cup_{i=1}^n A_i$, $E' = \cup_{i=j}^n B_j$ e $\forall i, j$, $[A_i] = \alpha, [B_j] = \beta$; sia $\chi : E \to E'$ che rende $E \sim_{G^*} E'$, e siano $\varphi_i : A_1 \to A_i$, $\psi_j : B_1 \to B_j$ che danno la G^*-equidecomponibilità (prendiamo $\varphi_1 = \psi_1 = \mathcal{I}d$). $\forall a \in A, b \in B$ definiamo $\overline{a} := \{a, \varphi_2(a), .., \varphi_n(a)\}$, $\overline{b} := \{b, \psi_2(b), .., \psi_n(b)\}$; allora $\{\overline{a} : a \in A_1\}$, $\{\overline{b} : b \in B_1\}$ sono partizioni di E, E' rispettivamente.

Formiamo quindi un grafico bipartito prendendo da una parte come vertici $\{\overline{a} : a \in A_1\}$, e dall'altra $\{\overline{b} : b \in B_1\}$; da ogni $\overline{a}$ facciamo partire n lati come segue: $\forall i = 1, .., n$ creiamo un lato da $\overline{a}$ agli $\overline{b}$ t.c. $\chi\varphi_i(a) \in \overline{b}$; otteniamo quindi un grafo n-regolare, poichè ogni $\overline{b}$ è in esattamente n lati: gli $\chi^{-1}\psi_i(b)$; per il teorema di König esiste quindi una corrispondenza perfetta M, ovvero $\forall \overline{a}\ \exists!$ lato $\{\overline{a}, \overline{b}\} \in M$, e $\overline{a}$ è connesso a $\overline{b}$ tramite $\chi\varphi_i(a) = \psi_j(b)$ per certi i, j. Definiamo quindi

$$C_{ij} := \{a \in A_1 : \{\overline{a}, \overline{b}\} \in M \text{ e } \chi\varphi_i(a) = \psi_j(b)\}$$

$$D_{ij} := \{b \in B_1 : \{\overline{a}, \overline{b}\} \in M \text{ e } \chi\varphi_i(a) = \psi_j(b)\}$$

Allora $\psi_j^{-1}\chi\varphi_i$ è una biiezione fra C_{ij} e D_{ij}, ovvero una G^*-decomposizione. Dato che $\{C_{ij}\}, \{D_{ij}\}$ partizionano A_1, B_1 rispettivamente, ciò mostra che $A_1 \sim_{G^*} B_1$, ovvero che $\alpha = \beta$. $\square$

Grazie a questi risultati possiamo passare alla dimostrazione del teorema di Tarski, lavorando su $\mathcal{S}$, l'insieme delle classi di equivalenza rispetto alla G^*-equidecomponibilità degli insiemi limitati, che risulta essere un ambiente ideale per la costruzione di una misura finitamente additiva G-invariante su $\mathcal{P}(X)$: infatti se μ è una tale misura, la G-invarianza rende μ invariante per G-equidecomponibilità, ed è quindi possibile definire una misura ν su $\mathcal{S}$ come $\nu([A]) := \sum \mu(A_n)$, dove gli A_n sono gli n-livelli noon vuoti di A, che risulta essere additiva, ovvero $\nu(\alpha + \beta) = \nu(\alpha) + \nu(\beta)$. Viceversa una misura ν su $\mathcal{S}$ con tale proprietà additiva permette di definire una misura μ finitamente additiva G-invariante su $\mathcal{P}(X)$ come $\mu(A) := \nu([A])$.

Dal seguente teorema seguirà direttamente il teorema di Tarski

Teorema 15. *Sia ε elemento non nullo di $\mathcal{S}$. Le seguenti sono equivalenti:*

- *(i): per ogni $n \in \mathbb{N}$ $(n+1)\varepsilon \not\leq n\varepsilon$*
- *(ii): esiste una funzione additiva [15] $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ tale che*
  - $\mu(\varepsilon) = 1$
  - $\mu(\alpha) \leq \mu(\beta)$ *se* $\alpha \leq \beta$

[15] Cioè $\mu(\alpha + \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$.

Dimostrazione. (ii)⇒(i): se per assurdo $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tale che $(n+1)\varepsilon \leq n\varepsilon$, alllora $\mu((n+1)\varepsilon) \leq \mu(n\varepsilon)$ e quindi $n+1 \leq n$. Assurdo.

(i)⇒(ii): l'idea è quella di costruire una funzione con le proprietà di sopra sugli elementi limitati [16], e poi estenderla a quelli non limitati ponendola $+\infty$; per costruire una tal misura intendiamo sfruttare il fatto che $[0,+\infty]^{\mathcal{S}}$ è compatto[17], e il seguente lemma.

Lemma 4. *Sia $\tau_0 \subset \mathcal{S}$ finito che contiene ε. Se vale la prima ipotesi del teorema, allora esiste una funzione $\mu : \tau_0 \to [0,+\infty]$ tale che*

- $\mu(\varepsilon) = 1$
- $\sum_{i=1}^{m} \mu(\varphi_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(\theta_j)$ *se* $\varphi_i, \theta_j \in \tau_0$ *e* $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i \leq \sum_{j=1}^{n} \theta_j$.

Prima di provare tale lemma, vediamo come questo ci porta al risultato voluto. Per ogni $\tau_0 \subset \mathcal{S}$ finito tale che $\varepsilon \in \tau_0$ definiamo

$$\mathcal{M}(\tau_0) := \{f \in [0,+\infty]^{\mathcal{S}} :\ f(\varepsilon) = 1, f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta) \text{ se } \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \tau_0\}$$

Il lemma ci assicura che ogni $\mathcal{M}(\tau_0)$ è non vuoto, dove la proprietà di additività segue facilmente dalla seconda proprietà del lemma[18]. Sfruttiamo quindi la compattezza di $[0,\infty]^{\mathcal{S}}$ per ottenere la misura desiderata.

- $\mathcal{M}(\tau_0)$ è chiuso: perchè rispetto alla topologia prodotto la convergenza è puntuale.
- $\mathcal{M}(\tau_1) \cap ... \cap \mathcal{M}(\tau_n) \supseteq \mathcal{M}(\tau_1 \cup ... \cup \tau_n) \neq \emptyset$, dove il fatto che quest'ultimo non sia vuoto deriva dal lemma, dato che $\varepsilon \in \cup_{i=1}^{n} \tau_i$, mentre il contenuto segue dall'osservazione che se $\alpha, \beta \in \tau_i$ allora non è detto che $\alpha + \beta \in \tau_i$, ma potrebbe essere che $\alpha + \beta \in \tau_j, j \neq i$.

Quindi $M := \{\mathcal{M}(\tau_0) : \varepsilon \in \tau_0, \mathrm{card}(\tau_0) < \aleph_0\}$ è una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita; quindi la compattezza di $[0,+\infty]^{\mathcal{S}}$ assicura l'esistenza di $\mu \in \cap M$. Tale μ è la misura cercata, dato che l'additività $\mu(\alpha+\beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$ segue dal fatto che $\mu \in \mathcal{M}(\{\varepsilon, \alpha, \beta, \alpha+\beta\})$. □

Diamo ora la dimostrazione del lemma:

Dimostrazione. procediamo per induzione sulla cardinalità di τ_0:

se $\mathrm{card}(\tau_0) = 1$, allora $\tau_0 = \{\varepsilon\}$, e quindi $\mu(\varepsilon) = 1$ è la misura voluta; la seconda condizione richiesta dal lemma segue dall'ipotesi iniziale: infatti se per assurdo $m\varepsilon \leq n\varepsilon \Rightarrow m \geq n$, allora si avrebbe che $m \geq n+1 \Rightarrow (n+1)\varepsilon \leq m\varepsilon \leq n\varepsilon$; assurdo.

[16] Ovvero gli $\alpha \in \tau$ tali che esiste $n \in \mathbb{N}$ che soddisfa a $\alpha \leq n\epsilon$.

[17] Vedi teorema di Tychonoff in appendice A.

[18] Basta porre: $\varphi_1 = \alpha + \beta, \theta_1 = \alpha, \theta_2 = \beta$.

Sia quindi $\mathrm{card}(\tau_0) > 1$, e $\alpha \in \tau_0 \setminus \{\varepsilon\}$; per ipotesi induttiva otteniamo una misura ν su $\tau_0 \setminus \{\alpha\}$ che verifica alle consizioni poste dal lemma; estendiamo quindi ν a μ su tutto τ_0 ponendo

$$\mu(\alpha) := \inf\{\sum[\nu(\beta_j) - \nu(\gamma_i)]/r : \ r \in \mathbb{N}^+, \sum \gamma_i + r\alpha \leq \sum \beta_j, \ \gamma_i, \beta_j \in \tau_0 \setminus \{\alpha\}\}$$

ovvero poniamo $\mu(\alpha)$ il maggiore possibile rispetto alle condizioni che deve soddisfare.
Allora $\mu(\alpha) \geq 0$, dato che $\varepsilon + \alpha \geq \varepsilon$, e $\mu(\alpha) < +\infty$ poichè α è limitato, quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha \leq n\varepsilon$ implica $\mu(\alpha) \leq n$. Ci rimane da verificare che se vale

$$(*) \ \varphi_1 + .. + \varphi_m + s\alpha \leq \theta_1 + .. + \theta_n + t\alpha \qquad \varphi_i, \theta_j \in \tau_0 \setminus \{\alpha\}$$

allora

$$\sum \mu(\varphi_i) + s\mu(\alpha) \leq \sum \mu(\theta_j) + t\mu(\alpha)$$

Distinguiamo tre casi:

- $s = t = 0$: deriva dall'ipotesi induttiva
- $s = 0, t > 0$: bisogna mostrare che

  $$\sum \mu(\varphi_i) \leq \sum \mu(\theta_j) + t\mu(\alpha)$$

  ovvero che

  $$\mu(\alpha) \geq w := (\sum \nu(\varphi_i) - \nu(\theta_j))/t$$

  sia quindi $\gamma_1 + .. + \gamma_q + r\alpha \leq \beta_1 + .. + \beta_p$ una disequazione per definire $\mu(\alpha)$; basta quindi mostrare che

  $$(\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_r))/r \geq w$$

  Da

  $$\varphi_1 + .. + \varphi_m \leq \theta_1 + .. + \theta_n + t\alpha$$

  segue che

  $$\begin{aligned} r\varphi_1 + .. + r\varphi_m + t\gamma_1 + t\gamma_q &\leq r\theta_1 + .. + r\theta_n + rt\alpha + t\gamma_1 + .. + t\gamma_q \\ &\leq r\theta_1 + .. + r\theta_n + t\beta_1 + .. + t\beta_p \end{aligned}$$

  e l'ipotesi induttiva su ν implica che

  $$r \sum \nu(\varphi_i) + t \sum \nu(\gamma_l) \leq r \sum \nu(\theta_s) + t \sum \nu(\beta_k)$$

  ovvero

  $$(\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l))/r \geq w$$

- bisogna mostrare che

$$s\mu(\alpha) + \sum \nu(\varphi_i) \leq t\mu(\alpha) + \sum \nu(\theta_j)$$

e per far ciò consideriamo una disequazione per definire $\mu(\alpha)$ $\gamma_i + .. + \gamma_q + r\alpha \leq \beta_1 + .. + \beta_p$ e definiamo $z := (\sum \nu(\beta_k) - \nu(\gamma_l))/r$, e facciamo vedere che

$$s\mu(\alpha) + \sum \nu(\varphi_i) \leq tz + \sum \nu(\theta_j)$$

Da $(*)$ si ha che

$$r\varphi_1 + .. + r\varphi_m + t\gamma_1 + .. + \gamma_q + rs\alpha \leq r\theta_1 + .. + r\theta_n + rt\alpha + t\gamma_1 + .. + .t\gamma_q$$

da cui

$$r\varphi_1 + .. + r\varphi_m + t\gamma_1 + .. + \gamma_q + rs\alpha \leq r\theta_1 + .. + r\theta_n + t\beta_1 + .. + t\beta_p$$

utilizzando quest'ultima disuguaglianza per definire $\mu(\alpha)$ otteniamo

$$s\mu(\alpha) + \sum \nu(\varphi_i) \leq$$

$$\leq \sum \nu(\theta_i) + s(\frac{1}{rs})[r \sum \nu(\theta_j) + t \sum \nu(\beta_k) - r \sum \nu(\varphi_i) - t \sum \nu(\gamma_l)] =$$

$$= tz + \sum \nu(\theta_j)$$

$\square$

Ecco quindi il risultato voluto

Teorema 16. ***(Teorema di Tarski)*** *Siano G un gruppo che agisce sull'insieme X. Un sottoinsieme $E \subset X$*

$$\left.\begin{array}{c} \exists\ \mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty] \\ \textit{misura additiva } G\textit{-invariante} \\ \textit{tale che } \mu(E) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow E \textit{ non è } G\textit{-paradossale}$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$: tale implicazione è già stata provata facendo vedere che se E ammette una G-decomposizione paradossale allora E è G-trascurabile (vedi proposizione 8).

$\Leftarrow$: dato che $2\varepsilon \neq \varepsilon$, dove $\epsilon := [E \times \{0\}]$ dal corollario 1 della legge di cancellazione abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $(n+1)\varepsilon \not\leq n\varepsilon$, e quindi $\mathcal{S}$ soddisfa alle ipotesi del teorema precedente. Esiste quindi una misura additiva ν su $\mathcal{S}$ tale che $\nu(\varepsilon) = 1$. Allora $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ data da $\mu(A) := \nu([A \times \{0\}])$ è la misura desiderata. $\square$

7 Gruppi ammissibili

In questo capitolo vogliamo studiare una classe di gruppi che ammettono misure invarianti. Inoltre daremo delle condizioni per cui una misura si possa estendere all'algebra di tutti gli insiemi.

Definizione 12. *Un gruppo G è detto* ammissibile *se ammette una misura μ su $\mathcal{P}(G)$ tale che $\mu(G) = 1$ e sia invariante a sinistra, ovvero per ogni $A \subset G$ e per ogni $g \in G$ vale*

$$\mu(gA) = \mu(A).$$

La classe dei gruppi ammissibili è indicata con AM.

Grazie al teorema di Tarski possiamo quindi affermare che un gruppo è o ammissibile o paradossale.

Prima di provare l'ammissibilità di alcuni gruppi, vediamo una conseguenza interessante dell'ammissibilità: sia $\mathcal{B}(G)$ la famiglia delle funzioni $G \to \mathbb{R}$ limitate; se G è ammissibile, con misura μ, su $\mathcal{B}(G)$ possiamo definire un integrale, come visto nel primo Capitolo, tramite μ a tutte le $f \in \mathcal{B}(G)$. Tale integrale soddisfa alle seguenti proprietà:

(a) tutte le funzioni sono misurabili rispetto a μ, poichè tutti i sottoinsiemi di G lo sono

(b) $\int \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$

(c) $\int f d\mu \geq 0$ se $f \geq 0$

(d) $\int \chi_G d\mu = 1$

(e) $\int {}_g f d\mu = \int f d\mu$

dove $f, g \in \mathcal{B}(G)$, $g \in G$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il simbolo ${}_g f$ denota la funzione su G definita da

$$({}_g f)(h) := f(g^{-1}h).$$

Di queste proprietà verifichiamo soltanto l'ultima, per ogni $f \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\int {}_g f \, d\mu &:= \int_0^{+\infty} \mu(\{h \in G : f(g^{-1}h) \geq t\}) \, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \mu(g^{-1}\{h \in G : f(g^{-1}h) \geq t\}) \, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \mu(\{g^{-1}h \in G : f(g^{-1}h) \geq t\}) \, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \mu(\{r \in G : f(r) \geq t\}) \, dt = \int f \, d\mu
\end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue dall'invarianza a sinistra di μ rispetto a G.

Un funzionale su $\mathcal{B}(G)$ che verifica le proprietà $(a) - (e)$ è detto *media su G invariante a sinistra.*

Ogni gruppo ammissibile ha una media invariante a sinistra. Viceversa se un gruppo ha una media F invariante a sinistra, allora tale gruppo è ammissibile, grazie alla misura data da $\mu(A) := F(\chi_A)$ dove $A \subset G$.

L'introduzione di tale funzionale permette di dimostrare alcuni risultati più facilmente. Ecco un esempio

Proposizione 9. *Sia G gruppo ammissibile. Allora esiste una misura ν su $\mathcal{P}(G)$ che è invariante a sinistra e a destra.*

Dimostrazione. Detta μ una misura che rende G ammissibile, definiamo la sua misura invariante a destra μ_0 come $\mu_0(A) := \mu(A^{-1})$. Sia quindi $A \subset G$, e definiamo $f_A \in B(G)$ come $f_A(g) := \mu(Ag^{-1})$; allora $f \leq 1$; definiamo quindi la misura ν come $\nu(A) := \int f_A d\mu_0$. Si vede facilmente che $\nu(G) = 1$, ν è finitamente addittiva perchè $f_{A\cup B} = f_A + f_B$ se $A \cap B = \emptyset$, e ν è invariante a sinistra e a destra. $\square$

Mostriamo ora come sia possibile utilizzare la misura di un gruppo ammissible per definirne una invariante sull'insieme su cui agisce.

Teorema 17. *Sia G gruppo ammissibile che agisce su un insieme X. Allora esiste una misura ν su $\mathcal{P}(X)$ finitamente additiva e G-invariante con $\nu(X) = 1$. Quindi X non può ammettere decomposizioni paradossali rispetto a G.*

Dimostrazione. Fissato $x \in X$ definiamo $\nu(A) := \mu(\{g \in G : gx \in A\})$ dove μ è una misura che rende G ammissibile. Allora ν è la misura cercata. $\square$

Lemma 5. *Sia G un gruppo. Se G è unione di una rete crescente di gruppi ammissibili* [19]*, allora G è ammissibile.*

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio topologico compatto $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$. Sia G_α la rete crescente dei sottogruppi ammissibili data dalle ipotesi. Essendo ogni G_α ammissibile, indichiamo con μ_α una misura su G_α invariante a sinistra. Definiamo per ogni $\alpha \in I$

$$\mathcal{M}_\alpha := \{\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1] \text{ fin. add. tale che } \mu(G) = 1, \mu(gA) = \mu(A), g \in G_\alpha\}$$

allora $\mathcal{M}_\alpha \neq \emptyset$ perchè possiamo definire una misura $\mu \in \mathcal{M}_\alpha$ come $\mu(A) := \mu_\alpha(A \cap G_\alpha)$ per $A \subset G$. Inoltre è evidente che i $\mathcal{M}_\alpha$ sono chiusi rispetto alla convergenza puntuale. Essendo G_α una rete crescente di sottogruppi, si

[19] Cioè esiste una rete $\{G_j\}_{j\in J}$ di sottogruppi ammissibili di G tale che $G = \cup_{j\in J} G_j$ e $G_j \subset G_{j'}$ per $j \leq j'$.

ha che $\mathcal{M}_\alpha$ è una rete decrescente, quindi l'intersezione di un numero finito di $\mathcal{M}_\alpha$ è non vuota. Perciò dalla compattezza di $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ segue che esiste $\mu \in \cap\{\mathcal{M}_\alpha : \alpha \in I\}$. Questa μ è la misura cercata. □

Dimostriamo ora l'ammissibilità di alcuni gruppi:

Teorema 18. *I seguenti gruppi sono ammissibili:*

1. *gruppi finiti*
2. *gruppi abeliani*
3. *i sottogruppi dei gruppi ammissibili ammissibili*
4. *se $N \lhd G \in AM$ allora $G/N \in AM$*
5. *se $N \lhd G$, $N, G/N \in AM$ allora $G \in AM$*
6. *i gruppi delle isometrie della retta e del piano sono ammissibili*
7. *i gruppi risolubili* [20] *sono ammissibili*

Dimostrazione. (1): la misura $\mu(A) := \mathrm{card}(A)/\mathrm{card}(G)$ è l'unica misura che rende G ammissibile.

(2): E' evidente che un gruppo abeliano è unione della rete crescente dei suoi sottogruppi finitamente generati. Sarà sufficiente dimostrare la (2) per i gruppi abeliani finiti, e poi sfruttare il lemma precedente per concludere. Sia quindi G abeliano generato da $g_1, .., g_m$.

1^0 passo: "dimostriamo che per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste $\mu_\varepsilon : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ verificante le seguenti tre proprietà

- $\mu_\varepsilon(G) = 1$
- μ_ε finitamente additiva
- per ogni $A \subset G$ e per ogni g_k generatore vale $|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(g_k A)| \leq \varepsilon$"

Scegliamo $N \in \mathbb{N}$ tale che $2/N \leq \varepsilon$, e definiamo

$$\mu_\varepsilon(A) := \mathrm{card}(\{(i_1, .., i_m) : 1 \leq i_1, .., i_m \leq N, g_1^{i_1} \cdots g_m^{i_m} \in A\})/N^m$$

e vediamo che tale misura verifica a

- $\mu_\varepsilon(G) = 1$
- finitamente additiva

[20] Siano G un gruppo e $x, y \in G$. Definiamo ed indichiamo il *commutatore* di x, y con $[x,y] := xyx^{-1}y^y$. Definiamo G^1, il *gruppo derivato* di G, come il gruppo formato dai commutatori degli elementi di G, e analogamente si definisce G^{n+1}, come il derivato di G^n. Un gruppo è detto *risolubile* se esiste un derivato triviale.

- dato che g_k commuta con gli altri generatori, allora

$$\begin{aligned}\mu_\varepsilon(g_kA) &= \operatorname{card}(\{(i_1,..,i_m) : 1 \le i_1,..,i_m \le N, g_1^{i_1}\cdots g_m^{i_m} \in g_kA\}) \\ &= \operatorname{card}(\{(i_1,..,i_m) : 1 \le i_1,..,i_m \le N, g_k^{i_k} g_1^{i_1}\cdots g_{k-1}^{i_{k-1}} g_{k+1}^{i_{k+1}}\cdots g_m^{i_m} \in g_kA\})\end{aligned}$$

e cambia solo nel caso in cui $i_k = 1, N$, ovvero per al massimo $2N^{m-1}$ m-uple di indici. Quindi

$$|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(gA)| \le 2N^{m-1}/N^m = 2/N \le \varepsilon$$

2^0 passo: "costruzione della misura." Avendo quindi tali funzioni, possiamo come al solito sfruttare la compattezza di $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ per ottenere la misura voluta.

(3): se $H \le G \in AG$, detta μ misura che rende G ammissibile definiamo ν misura su $\mathcal{P}(H)$ come $\nu(A) := \mu(\cup_{h\in M} Ah)$, dove M è un trasversale destro di H in G.

(4): sia $A \subset G/N$, μ misura su G; allora $\nu(A) := \mu(\cup A)$ rende G/N ammissibile.

(5): siano ν_1, ν_2 misure su $N, G/N$ rispettivamente. Sia $A \subset G$, e definiamo $f_A : G/N \to \mathbb{R}$ come $f_A([g]) := \nu_1(N \cap g^{-1}A)$. Tale f_A è ben definita: infatti se $[g_1] = [g_2]$, ovvero $\exists\, h \in N\ g_2 = hg_1$, allora

$$f_A(g_1) = \nu_1(N\cap g_1^{-1}A) = \nu_1(N\cap hg_2^{-1}A) = \nu_1(h(N\cap g_2^{-1}A)) = \nu_1(N\cap g_2^{-1}A) = f_A(g_2)$$

Definiamo quindi una misura μ su G come $\mu(A) := \int f_A d\nu_2$. Allora:

- $\mu(G) = 1$
- $A, B \subset G$ disgiunti, allora per ogni $g \in G$ vale $g^{-1}A \cap g^{-1}B = \emptyset$, e quindi

$$\begin{aligned}f_{A\cup B}(g) &= \nu_1(N \cap g^{-1}(A \cup B)) \\ &= \nu_1((N \cap g^{-1}A) \cup (N \cap g^{-1}B)) \\ &= f_A(g) + f_B(g) \end{aligned} \tag{2}$$

- $f_{gA}(g_0) = \nu_1(N \cap g_0^{-1}gA) = f_A(g^{-1}g_0) = {}_g(f_A)(g_0)$, e quindi $\mu(gA) = \mu(A)$ per ogni $g \in G$.

(6): 1^0 caso: " ammissibilità del gruppo G_1 delle isometrie di $\mathbb{R}$". Osservato che il quoziente $G_1/\mathcal{T}$ di G_1 sul sottogruppo normale $\mathcal{T}$ delle traslazioni è di ordine 2, e che $\mathcal{T}$ è commutativo, dalle proprietà (2) e (5) segue immediatamente l'ammissibilità di G_1.

2^0 caso: " ammissibilità del gruppo G_2 delle isometrie di $\mathbb{R}^2$". Denotiamo con $\mathcal{D}$ il sottogruppo normale delle isometrie dirette del piano e con $\mathcal{T}$ il sottogruppo normale delle traslazioni. Si osservi che $\mathcal{T}$ è commutativo, quindi ammissibile, e inoltre il quoziente $\mathcal{D}/\mathcal{T}$ è commutativo, quindi anch'esso ammissibile. Perciò, grazie a (5), $\mathcal{D}$ è ammissibile. D'altra parte il quoziente $G_2/\mathcal{D}$ è di ordine 2. Quindi, grazie a (5), abbiamo pure l'ammissibilità di G_2, come richiesto.

(7): segue direttamente da (2) e da (5). □

Questo teorema ci permette quindi di affermare che EG, ovvero la più piccola classe contenente i gruppi finiti e gli abeliani, è contenuta in AM; inoltre quest'ultima è contenuta in NF, la classe dei gruppi che non hanno sottogruppi liberi di rango 2. Ovvero

$$EG \subset AM \subset NF$$

Tali inclusioni sono proprie? Il lavoro di Grigorchuk e Ol'shanskii fu proprio quello di mostrare che tali inclusioni sono proprie: per la seconda mostrarono che esiste un gruppo paradossale che non contiene nessun elemento di ordine infinito, e quindi nessun sottogruppo libero di rango 2; invece, sebbene sia noto che debba esistere, non è ancora stato costruito un esempio semplice di gruppo ammissibile non elementare.

È invece interessante osservare che se si restringe la classe dei gruppi considerati, le tre classi di sopra coincidono:

Teorema 19. ***(Teorema di Tits)*** *Sia G un gruppo di matrici quadrate $n \times n$ non singolari, con elementi in un campo K; allora*

- *se K ha caratteristica 0, allora o G ha un sottogruppo libero di ordine 2, oppure è risolubile.*
- *se K ha caratteristica diversa da 0, allora o ha un sottogruppo libero di ordine 2, oppure esiste $H \triangleleft G$ risolubile localmente finito (ovvero ogni suo sottoinsieme finito genera un sottogruppo finito).*

Vediamo ora come sia possibile ottenere delle estensioni di misure. Rimandiamo all'appendice A per la trattazione minima delle algebre booleane necessaria per le seguenti dimostrazioni.

Teorema 20. ***(Teorema dell'estensione della misura - Horn, Tarski)*** *Sia $\mathcal{A}_0$ un sottoanello dell'algebra booleana $\mathcal{A}$, e μ una misura su $\mathcal{A}_0$. Allora esiste una misura $\overline{\mu}$ su $\mathcal{A}$ che estende μ.*

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto $\mathcal{A}$ finito e procediamo per induzione sul numero di atomi di $\mathcal{A}$: se $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ è ovvio; procediamo quindi considerando $\mathcal{A}_0 \backslash \{0\}$; se tale insieme è vuoto, allora estendo μ come $\overline{\mu} \equiv 0$; altrimenti sia $b \in \mathcal{A}_0 \backslash \{0\}$ minimale rispetto a $\leq$ e definisco $c := b'$. Considero quindi $\mathcal{A}_c$ e il sottoanello $\mathcal{A}_c \cap \mathcal{A}_0$ con misura $\mu_{|\mathcal{A}_c \cap \mathcal{A}_0}$; sia a_0 atomo di $\mathcal{A}$ t.c. $a_0 \leq b$. Allora $a_0 \notin \mathcal{A}_c$ poichè $a_0 \leq b \Rightarrow a_0 \wedge b = a_0$, e quindi $\mathcal{A}_c$ ha meno atomi di $\mathcal{A}$; per ipotesi induttiva ho quindi una misura ν su $\mathcal{A}_c$ che estende $\mu_{|\mathcal{A}_c \cap \mathcal{A}_0}$; estendo quindi ν a $\overline{\mu}$ su tutto $\mathcal{A}$ definendola sugli atomi $a \in \mathcal{A}$ come

- $a \leq c$: $\overline{\mu}(a) = \nu(a)$
- $a = a_0$: $\overline{\mu}(a_0) = \mu(b)$
- $a \leq b, a \neq a_0$: $\overline{\mu}(a) = 0$

ed estendendola a tutti gli elementi di $\mathcal{A}$ tramite $\overline{\mu}(e) := \sum\{\overline{\mu}(a) : a \text{ atomo }, a \leq e\}$.

Allora $\overline{\mu}$ è finitamente additiva e coincide necessariamente con ν su $\mathcal{A}_c$; mostriamo che $\overline{\mu}$ coincide con μ su tutto $\mathcal{A}_0$: la minimalità di b implica che se $d \in \mathcal{A}_0$, allora $d \geq b$, oppure $d \wedge b = 0$; in quest'ultimo caso $d \leq c$, e quindi $\overline{\mu}(d) = \nu(d) = \mu(d)$. Nel primo caso invece $d = b \vee (d - b)$, da cui

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(d) &= \overline{\mu}(b) + \overline{\mu}(d-b) \\ &= \mu(b) + \nu(d-b) \\ &= \mu(b) + \mu(d-b) = \mu(d) \end{aligned}$$

Estendiamo poi tale risultato al caso in cui $\mathcal{A}$ sia infinito grazie alla solita tecnica di compattezza di $[0, +\infty]^{\mathcal{A}}$. □

Il seguente risultato permetterà di estendere la misura di Lebesgue nel caso di dimensione 1 e 2.

Teorema 21. ***(Teorema dell'estensione invariante)*** *Se nelle ipotesi del teorema precedente $\mathcal{A}_0$ e μ sono G invarianti, dove G è un gruppo ammissibile di automorfismi di $\mathcal{A}$, allora $\overline{\mu}$ può essere presa G-invariante.*

Dimostrazione. Dal teorema precedente ottengo un'estensione ν di μ a tutto $\mathcal{A}$; sia θ misura su G. allora per ogni $b \in \mathcal{A}$ definiamo $f_b(g) := \nu(g^{-1}(b))$; allora la misura G-invariante voluta è

$$\overline{\mu}(b) := \begin{cases} \int f_b \, d\theta & \text{se } f_b \in B(G) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti:

- $\forall\, b \in \mathcal{A}_0$ $\overline{\mu}(b) = \mu(b)$ poichè $f_b(g) = \nu(g^{-1}(b)) = \mu(g^{-1}(b)) = \mu(b)$
- $\overline{\mu}$ è G-invariante

$$\begin{aligned} f_{g(b)}(h) &= \nu(h^{-1}g(b)) \\ &= \nu((g^{-1}h)^{-1}(b)) \\ &= f_b(g^{-1}h) = ({}_g(f_b))(h) \end{aligned} \qquad (3)$$

e si sfrutta quindi la proprietà di invarianza dell'integrale.

□

Questo risultato ci permette di affermare che esiste un'estensione finitamente additiva della misura di Lebesgue invariante per isometrie a tutti i sottoinsiemi dello spazio nel caso di $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{R}^2$, visto che i gruppi delle isometrie di tali spazi sono ammissibili. Notiamo che la misura di Lebesgue risulta essere σ-additiva sulla σ-algebra dei misurabili, mentre l'estensione garantisce solo l'additività finita. Inoltre possiamo affermare che l'esistenza di una tale misura fa sì che nessun sottoinsieme limitato e con interno non vuoto di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{R}^2$ ammetta una decomposizione paradossale rispetto al gruppo delle isometrie di tali spazi.

Il teorema 21 inoltre ci permette di dare una risposta negativa al problema di Marczewski nel caso di dimensione 1 e 2.

Definizione 13. *Denotiamo con $\mathcal{B}$ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ aventi la proprietà di Baire. Una $\mathcal{B}$*-misura *è una misura finitamente additiva, invariante per traslazioni che normalizza il cubo unitario definita su $\mathcal{B}$.*

Definizione 14. *Una* misura di Marczewski *su $\mathbb{R}^n$ è una $\mathcal{B}$-misura che svanisce sugli insiemi magri limitati.*

Teorema 22. *Siano $\mathcal{A}$ un'algebra booleana, G un gruppo ammissibile di automorfismi di $\mathcal{A}$, I un ideale G-invariante di $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ un sottoanello G-invariante di $\mathcal{A}$ e μ una misura G-invariante su $\mathcal{C}$ che svanisce su $\mathcal{C} \cap I$. Allora esiste un'estensione $\overline{\mu}$ su $\mathcal{A}$ G-invariante di μ che svanisce su I.*

Dimostrazione. La G-invarianza di I induce un'azione di G sui quozienti $\mathcal{A}/I$ e $\mathcal{C}/\mathcal{C}\cap I$, dove quest'ultimo risulta essere un sottoanello G-invariante del primo. Inoltre le ipotesi su μ permettono di definire una misura G-invariante ν su $\mathcal{C}/\mathcal{C} \cap I$ come $\nu([c]) := \mu(c)$. il teorema di estensione invariante mi fornisce quindi un'estensione $\overline{\nu}$ di ν a tutto $\mathcal{A}/I$ G-invariante. Definiamo quindi $\overline{\mu}(a) := \overline{\nu}([a])$. □

Corollario 2. *Sia G un gruppo ammissibile di isometrie di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una misura finitamente additiva, G-invariante su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ che normalizza il cubo e che svanisce sugli insiemi magri.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente a $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C}$ la famiglia degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan [21], μ la misura di Peano-Jordan e I l'ideale costituito dagli insiemi magri. Dato che la misura di Peano-Jordan svanisce sugli insiemi magri che sono misurabili secondo Peano-Jordan, si ha quanto voluto. □

E dato che i gruppi delle isometrie di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ sono ammissibili, segue direttamente

Corollario 3. *Esiste una misura di Marczewski su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$.*

[21] Vedi appendice A per la misura di Peano-Jordan.

L'esistenza di una misura di Marczewski su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ fornisce quindi una risposta negativa al problema di Marczewski in questi due spazi. Ma per quanto riguarda $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 3$ tale quesito risulta essere ancora un problema aperto.

8 Gruppi ammissibili: caratterizzazioni

Presentiamo infine delle caratterizzazioni dell'ammissibilità.

Teorema 23. *Sia G un gruppo. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *G è ammissibile*

(2 *Esiste una media invariante a sinistra su G*

(3) *G non è paradossale*

(4) *G soddisfa il teorema di estensione invariante*

(5) *G soddisfa la proprietà di estensione di Hanh-Banach: supponiamo*

1. *(a) G un gruppo di operatori lineari su uno spazio vettoriale reale V*
2. *(b) F un funzionale G-invariante su V_0 sottospazio di V G-invariante*
3. *(c) $F(v) \leq p(v)$ per ogni $v \in V_0$, dove $p : V \to \mathbb{R}$ tale che $p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2)$, $p(\alpha v) = \alpha p(v)$, $p(gv_1) \leq p(v_1)$ per ogni $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $g \in G$.*

Allora esiste un funzionale $\overline{V}$ G-invariante su V che estende F e tale che $\overline{F}(v) \leq p(v)$ per ogni $v \in V$.

(6) *G soddisfa alla condizione di Følner: per ogni $W \subset G$ finito e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $W^* \subset G$ finito tale che per ogni $g \in G$ $\mathrm{card}(gW \triangle W^*)/\mathrm{card}(W^*) \leq \varepsilon$*

(7) *G soddisfa la condizione di Dixmier: se $f_1, .., f_n \in B(G)$ e $g_1, .., g_n \in G$, allora esiste $h \in G$ tale che $\sum_{i=1}^{n}(f_i(h) - f_i(g_i^{-1}h)) \leq 0$.*

(8) *G soddisfa il teorema del punto fisso di Markov-Kakutani: sia K un sottoinsieme compatto e convesso di uno spazio topologico lineare localmente convesso X; supponiamo che G agisca su K in modo che per ogni $g \in G$, $g : K \to K$ sia continua ed affine. Allora esiste un $x \in K$ fissato da ogni $g \in G$.*

Dimostrazione. Le equivalenze $(1)-(3)$ sono già state provate in precedenza.

(4) $\Rightarrow$ (1): definiamo l'algebra di insiemi $\mathcal{A} := \mathcal{P}(G)$, e la sottoalgebra $\mathcal{A}_0 := \{\emptyset, G\}$. Sia μ misura sull'algebra $\mathcal{A}_0$ definita come $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(G) = 1$. Allora è possibile estendere μ a $\overline{\mu}$, misura finitamente additiva e invariante a sinistra definita su $\mathcal{A}$. Otteniamo quindi l'ammissibilità di G come voluto.

(1) $\Rightarrow$ (5): grazie al teorema di Hanh-Banach classico otteniamo un funzionale F_0 su V che estende F e che è dominato da p. Per ogni $v \in V$ definiamo $f_v : G \to \mathbb{R}$ come $f_v(h) := F_0(h^{-1}(v))$; allora $f_v(h) = F_0(h^{-1}v) \leq$

$p(h^{-1}v) \leq p(v)$. Sia quindi μ misura su G che lo rende ammissibile, definiamo il funzionale $\overline{F}$ su V come $\overline{F}(v) := \int f_v \, d\mu$. Notiamo che $\overline{F}(v) \leq p(v)$ per ogni $v \in V$ perchè $f_v \leq p(v)$; inoltre $\overline{F}$ è lineare, G-invariante, ed estende F. Quindi $\overline{F}$ è il funzionale voluto.

(5) $\Rightarrow$ (1): siano $V = B(G)$ e V_0 il sottospazio di V generato dalle funzioni costanti. L'azione di G su V data da $g(f) := {}_g f$ è lineare, e fa sì che V_0 sia G-invariante. Definiamo il funzionale F su V come $F(\alpha\chi_G) := \alpha$ e la seminorma p come $p(f) := \sup\{f(g) : g \in G\}$.Grazie a (5) otteniamo un'estensione lineare $\overline{F}$ di F a tutto V, G-invariante e dominata da p. Allora tale $\overline{F}$ è una media su G invariante a sinistra. Quindi G è ammissibile.

(2) $\Rightarrow$ (7): sia F media su G invariante a sinistra. Allora $F(\sum_{i=1}^{n}(f_i - {}_{g_i}f)) = 0$ vale per ogni $f \in B(G)$ e $g \in G$. Dato che se $f \geq 0$ allora $F(f) \geq 0$, segue che esiste un $h \in G$ tale che $\sum_{i=1}^{n}(f_i(h) - {}_{g_i}f(h)) \leq 0$.

(7) $\Rightarrow$ (2): sia V_0 il sottospazio di $B(G)$ generato dalle funzioni costanti e da quelle del tipo $f - {}_g f$ con $f \in B(G)$, $g \in G$; ogni elemento di V_0 è della forma $f - {}_g f + \alpha\chi_G$. Definiamo su V_0 il funzionale lineare F dato da $F(f - {}_g f + \alpha\chi_G) := \alpha$, e $p(v) := \sup v$ con $v \in V_0$. Si vede che $F(v) \leq \sup v$ per ogni $v \in V_0$: infatti $-(f - {}_g f) = -f - {}_g(-f)$ che assume per ipotesi un valore ≤ 0; quindi $f - {}_g f + \alpha\chi_G = \alpha\chi_G - (-(f - {}_g f))$ assume un valore pari almeno ad α. Dal teorema di hanh-Banach otteniamo quindi un'estensione lineare $\overline{F}$ di F a tutto $B(G)$ dominata da p. Inolre la definizione di F rende $\overline{F}$ G-invariante [22] e tale che $\overline{F}(\chi_G) = 1$. Inoltre se $f \in B(G)$ è tale che $f(h) \geq 0$ per ogni $h \in G$, allora $\overline{F}(f) \geq 0$. Quindi $\overline{F}$ è una media su G invariante a sinistra, ovvero G è ammissibile.

Per le prossime equivalenze, eventuali definizioni e risultati notevoli si possono trovare in appendice A.

(8) $\Rightarrow$ (2): diamo allo spazio vettoriale $B(G)$ struttura di spazio normato con la norma dell'estremo superiore, e sia X il duale di $B(G)$, spazio vettoriale topologico grazie alla topologia debole. X risulta essere spazio vettoriale topologico localmente convesso. Definiamo K come il sottoinsieme di K costituito da tutti i funzionali F che soddisfano a $\inf(f) \leq F(f) \leq \sup(f)$ con $f \in B(G)$. Allora ogni $F \in K$ soddisfa a $|F(f)|/\|f\| \leq 1$, e quindi K è contenuto nella sfera piena unitaria; dato che K è chiuso e la sfera piena unitaria compatta, K risulta essere compatto. Inoltre K è convesso. Facciamo agire G su X come $g(F)(f) := F({}_g f)$; tale azione risulta essere lineare, e quindi affine, e continua. Inoltre $\inf({}_g f) = \inf(f)$ e $\sup({}_g f) = \sup(f)$, e quindi ogni $g \in G$ mappa K in se stesso. Per ipotesi segue quindi l'esistenza di un funzionale $F \in K$ fissato da ogni $g \in G$. Tale funzionale risulta essere una media sinistra-invariante su G.

(1) $\Rightarrow$ (8): sia μ misura su G che lo rende ammissibile, e $x \in X$. Definiamo $f : G \to K$ come $f(g) := g(x)$. Sia D l'insieme diretto di tutti i ricoprimenti aperti $\varphi := \{U_i\}$ di K ordinati per raffinamento. Per co-

[22] Infatti se $f \in B(G)$ e $g \in G$, allora $\overline{F}(f) - \overline{F}({}_g f) = \overline{F}(f - {}_g f) = F(f - {}_g f) = 0$.

modità assumiamo $U_i \cap K \neq \emptyset$. Definiamo una rete $\phi : D \to K$ come segue: presa $\pi \in D$ scegliamo dei punti $s_i \in U_i \cap K$ per ogni i, e definiamo $\phi(\pi) := \sum \mu(E_i) s_i$, dove $E_i := f^{-1}(U_i) \setminus \cup \{E_j : j < i\}$; ciò rende $\phi(\pi)$ combinazione convessa degli s_i, e ciò garantisce che $\phi(\pi) \in K$.

1^a asserzione. *Sia V un intorno convesso e simmetrico dell'origine. Se π è $V/2$-fine e π' rifinisce π, allora $\phi(\pi') - \phi(\pi) \in V$.*

Dimostriamolo nel caso in cui π consista di un solo aperto U, e $s \in U$ fissato. Sia $\pi' = \{U_i'\}$, e scegliamo i punti $s_i \in U_i'$. Allora $\phi(\pi) = s$ e $\phi(\pi') = \sum \alpha_i s_i$, dove $\sum \alpha_i = 1$. Abbiamo che $K \subset U \subset t + V/2$ per un certo $t \in X$, $s = t/2 + v$ per un certo $v \in V$, e $s_i = t/2 + v_i$ per certi $v_i \in V$. La convessità di V implica che $\sum \alpha_i s_i = t + v'/2$ per un certo $v' \in V$. Allora, dato che $-v/2 \in V$, $\phi(\pi') - \phi(\pi) = (\sum \alpha_i s_i - t) + (t - s) = v'/2 - v/2 \in V$.

2^a asserzione. *Esiste un unico $x \in K$ tale che la rete ϕ converga a x.*

La compattezza di K implica che esiste almeno un punto x in $\cap_{\pi_0} \{\phi(\pi) : \pi \text{ rifinisce } \pi_0\}$. Per provare che ϕ converge a x basta provare che se U è un intorno convesso e simmetrico dell'origine, allora esiste $\pi \in D$ tale che $\phi(\pi') \in x + U$, dove π' è un raffinamento di π. Sia quindi π un $U/4$-fine ricoprimento in D, che esiste per compattezza. Assumiamo se necessario che $\phi(\pi) \in x + U/2$. Se π' è un raffinamento di π. Per l'asserzione precedente $\phi(\pi') - \phi(\pi) \in U/2$, e dato che $\phi(\pi) \in x + U/2$, allora $\phi(\pi') \in U$. Dato che X è di Hausdorff, tale limite è unico.

3^a asserzione. *Sia ρ una rete su D definita allo stesso modo di ϕ, ma con una scelta diversa di punti s_i. Allora ρ converge allo stesso punto x a cui converge ϕ.*

Siano U un intorno convesso simmetrico dell'origine e π un $U/4$-fine. Allora ogni raffinamento π' di π soddisfa a $\phi(\pi') \in x + U/2$. Siano quindi $\phi(\pi')$ definita dai punti $\{s_i\}$, e $\rho(\pi')$ dai punti $\{r_i\}$. Dato che π' è $U/4$-fine, esistono dei punti $\{t_i\}$ tali che $r_i, s_i \in t + U/4$; ma allora dalla simmetria di U segue che $r_i - s_i \in U/2$, e la convessità di U implica che $\rho(\pi') - \rho(\pi) \in U/2$, ovvero $\rho(\pi') \in x + U$ per ogni raffinamento π' di π. Quindi la rete ρ converge a x.

Conclusione. Sia $g \in G$, e definiamo una rete $g\phi$ su D come $(g\phi)(\pi) := g(\phi(\pi))$. Tale rete converge a $g(x)$. Mostriamo quindi che $g\phi$ converge a x, e dall'unicità del limite si avrà che $g(x) = x$ per ogni $g \in G$. Ogni $g \in G$ induce una mappa $D \to D$ data da $g(\pi) := \{\{y : g(y) \in U_i\} : U_i \in \pi\}$ che preserva l'ordine. Usiamo una tale mappa per definire una rete ψ su D come $\psi(\pi) := \phi(g(\pi))$. Si ha che se ψ converge ad un certo y, allora anche ϕ convergerà allo stesso y. Affermiamo che $g\psi$ converge a x, il limite di ϕ. Infatti $(g\psi)(\pi) = g(\psi(\pi)) = g(\phi(g(\pi))) = g(\sum \alpha_i r_i)$, dove r_i appartiene all'i-simo insieme del ricoprimento di $g(\pi)$. Ma l'affinità di g e il fatto che la misura su G è G-invariante fanno sì che $g(\sum \alpha_i r_i) = \sum \alpha_i g(r_i)$. Dato che $g(r_i) \in U_i$, $g\psi$ soddisfa alle ipotesi dell'asserzione precedente, e quindi $g\psi$ converge a x, ovvero $g\phi$ converge ad x.

(6) $\Rightarrow$ (1): l'idea della dimostrazione è la stessa utilizzata per mostrare

che i gruppi abeliani finitamente generati sono ammissibili. Fissiamo quindi un sottoinsieme finito W di G e un numero reale positivo ε. Definiamo $\mathcal{M}_{W,\varepsilon}$ come l'insieme delle funzioni finitamente additive $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ tali che $\mu(G) = 1$ e per ogni $g \in G$ e $A \subset G$ soddisfano a $|\mu(A) - \mu(gA)| \leq \varepsilon$. Tali $\mathcal{M}_{W,\varepsilon}$ sono chiusi. Inoltre sono non vuoti perchè $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ definita da $\mu(A) := \text{card}(A \cap W^*)/\text{card}(W^*)$, dove W^* è l'insieme garantito dalla condizione di Følner, sta in $\mathcal{M}_{W,\varepsilon}$

(1) $\Rightarrow$ (6): (caso abeliano) supponiamo $W = \{g_1, .., g_m\}$ e procediamo per induzione su m.

1^0 caso: $m = 1$. Sia $r \in \mathbb{N}$ l'ordine di g_1, se questo ha ordine finito, oppure abbastanza grande da soddisfare a $2/r \leq \varepsilon$. Allora definiamo $W^* := \{1, g_1, g_1^2, .., g_1^{r-1}\}$.

2^0 caso: passo induttivo. Siano $V := \{g_1, .., g_{m-1}\}$, e H il sototgruppo di G generato da V. Supponiamo esista un $r \in \mathcal{N}_1$ tale che $g_m^r \in V$, ovvero g_m^r è una parola ridotta di lunghezza s in $g_1^{\pm 1}, .., g_{m-1}^{\pm 1}$. Grazie all'ipotesi induttiva otteniamo un sottoinsieme finito V^* tale che $\text{card}(gV^* \triangle V^*)/\text{card}(V) \leq \epsilon/rs$ per ogni $g \in V$. Definiamo quindi $W^* := V^* \cup g_m V^* \cup \cdots g_m^{r-1} V^*$. Allora W^* è l'insieme voluto.

Se invece nessuna potenza positiva di $g_m \in V$, scegliamo un naturale r tale che $2/r \leq \varepsilon$, e grazie allle ipotesi induttive otteniamo $V^* \subset H$ tale che $\text{card}(gV^* \triangle V^*)/\text{card}(V^*) \leq \varepsilon/r$ per ogni $g \in V$. Definiamo quindi $W^* := V^* \cup g_m V^* \cup \cdots g_{m-1}^{r-1} V^*$. Tale W^* è l'insieme voluto. □

L'equivalenza (1) $\Leftrightarrow$ (5) permette di formulare la seguente proposizione.

Proposizione 10. *Sia G un gruppo ammissibile di isometrie di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste un'estensione finitamente additiva della misura di Lebesgue che risulta essere invariante rispetto a G e definita su tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Siano G un gruppo ammissibile di isometrie di $\mathbb{R}^n$, V_0 lo spazio delle funzioni Lebesgue-sommabili di $\mathbb{R}^n$ e V lo spazio di tutte le funioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che esiste una $g \in V_0$ che soddisfa a $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Facciamo agire il gruppo delle isometrie su V e su V_0 come $(g(f))(x) := f(g^{-1}(x))$ per ogni $g \in G$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Sia F il funzionale lineare su V_0 definito da $F(f) := \int f\, dx$; F risulta essere G-invariante. Definiamo una pseudo-norma p su V come $p(f) := \inf\{F(g) : g \in V_0 \text{ tali che } f(x) \leq g(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n\}$. per la proprietà di estensione di Hanh-Banach esiste quindi un funzionale lineare G-invariante $\overline{F}$ su V che estende F ed è dominato da p. Grazie a tale funzionale possiamo definire una misura $\overline{\mu}$ su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ come, per $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\overline{\mu}(A) := \begin{cases} \overline{F}(\chi_A) & \text{se } \chi_A \in V \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tale $\overline{\mu}$ risulta essere una misura finitamente additiva e G-invariante che estende la misura di Lebesgue. □

9 Appendice A

In quest'appendice intendiamo fornire i concetti ed i teoremi fondamentali che sono stati utilizzati per dimostrare alcuni risultati presentati.

9.1 Teorema di König

Introduciamo ora le principali nozioni necessarie per l'enunciazione del Teorema di König, utilizzato nella dimostrazione della legge di cancellazione.

Definizione 15. *Un* grafo *è una coppia ordinata* (V, E)*, dove* V *è un insieme i cui elementi sono detti* vertici*, e* E *è una famiglia parametrizzata di sottoinsiemi di* V*, detti* lati*, aventi* 1 *o* 2 *elementi.*

Un grafo è detto bipartito *se è possibile partizionare* V *in* V_1, V_2 *in modo tale che*

$$\forall \ \{x, y\} \in E \quad x \in V_1, y \in V_2 \text{ oppure } y \in V_1, x \in V_2$$

Il grado *di un vertice è il numero di lati che lo contengono. Il grafo è detto essere* k-regolare *se ogni vertice ha grado* k*.*

Una corrispondenza perfetta *in un grafo è una collezione di lati tali che due distinti di essi non abbiano vertici in comune.*

Teorema 24. ***(Teorema di König)*** *Un grafo k-regolare bipartito ammette una corrispondenza perfetta.*

9.2 Teorema di Tychonoff

Teorema 25. *Il prodotto topologico di spazi topologici compatti è uno spazio topologico compatto.*

Inoltre vale la seguente

Proposizione 11. *Sia* X *uno spazio topologico compatto. Per ogni famiglia di chiusi* $\{C_i\}_{i \in I} \subset X$*, tale che per ogni suo sottoinsime finito* J *vale*

$$\bigcap_{C_i \in J} C_i \neq \emptyset \quad \text{proprietà dell'intersezione finita}$$

allora

$$\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. Infatti se per assurdo la famiglia $\{C_i\}_{i \in I} \subset X$ avente la proprietà dell'intersezione finita fosse tale che $\cap_{i \in I} C_i = \emptyset$, allora passando ai complementari si avrebbe che la famiglia di aperti $\{A_i\}_{i \in I}$, dove per ogni $i \in I$ $A_i := X \backslash C_i$, è un ricoprimento aperto di X. Essendo X compatto, $\{A_i\}_{i \in I}$ ammette un sottoricoprimento finito $\{A_j\}_{j=1}^n$. Si avrebbe quindi che $\cap_{j=1}^n C_j = \emptyset$. Assurdo. $\square$

9.3 Teorema di Hermite-Lindemann

Teorema 26. ***(Teorema di Lindemann-Weierstrass)*** *Siano $u_1, .., u_n$ numeri complessi algebrici linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$. Allora $e^{u_1}, .., e^{u_n}$ sono linearmente indipendenti sul campo dei numeri algebrici.*

Da tale teorema segue facilmente che e^i è trascendente. Inoltre segue anche la trascendenza di π, dal fatto che $e^{i\pi} = -1$, e quindi $i\pi$ è trascendente. Dato che i è algebrico, ciò implica che π è trascendente.

9.4 Numeri cardinali e ordinali

Definiamo ora i numeri cardinali, e vediamone alcune proprietà

Definizione 16. *Due insiemi X, Y si dicono avere* la stessa cardinalità *se esiste una corrispondenza biunivoca da X in Y. Le classi di equivalenza rispetto a questa relazione sono dette* numeri cardinali, *e verranno denotati con* $\mathrm{card}(X)$.

Un numero naturale n denoterà la classe di equivalenza degli insiemi aventi n elementi. Il simbolo $\aleph_0$ denoterà la cardinalità di $\mathbb{N}$.

Siano $\alpha := \mathrm{card}(X), \beta := \mathrm{card}(Y)$, dove X, Y sono due insiemi; allora definiamo:

- $\alpha\beta := \mathrm{card}(X \times Y)$
- $\alpha + \beta := \mathrm{card}(X \cup Y)$ se X, Y sono disgiunti
- $\alpha^\beta := \mathrm{card}(X^Y)$

Definiamo ora una relazione d'ordine $\leq$ sui numeri cardinali: siano X, Y insiemi, e α, β i rispettivi numeri cardinali; diremo che $\alpha \leq \beta$ ssse esiste un'applicazione iniettiva fra X ed Y. Diremo inoltre che $\alpha < \beta$ se esistono applicazioni iniettive da X in Y, ma nessuna di queste è biiettiva.

Un importante risultato è il seguente

Teorema 27. ***(Teorema di Cantor)*** $\alpha < 2^\alpha$.

E dato che

Teorema 28. $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$.

Si ha subito che $\mathrm{card}(\mathbb{R}) > \mathrm{card}(\mathbb{N})$. È inoltre interessante il seguente

Teorema 29. ***(Paradosso di Cantor)*** $(\mathrm{card}(\mathbb{R}))^2 = \mathrm{card}(\mathbb{R})$.

Inoltre $\aleph_0$ è il più piccolo cardinale infinito.

Un insieme X sarà detto *numerabile* se $\mathrm{card}(X) \leq \aleph_0$; inoltre se $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$, si dirà che X ha la cardinalità *del continuo*.

Dimostriamo ora alcuni risultati utilizzati nella costruzione dell'insieme di Sierpiǹski.

Lemma 6. *La cardinalità dei sottoinsiemi di un insieme infinito numerabile è il continuo.*

Dimostrazione. Si vede immediatamente grazie alla corrispondenza biunivoca $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ data da

$$A \mapsto f \text{ dove } f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e dal fatto che $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$. □

Proposizione 12. *$\alpha+\beta = \alpha$ per ogni cardinale infinito α maggiore o uguale del cardinale β.*

Proposizione 13. *Se X è infinito, allora* $\mathrm{card}(X \times X) = \mathrm{card}(X)$.

Proposizione 14. *La cardinalità dei chiusi, e quindi degli aperti, è il continuo.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{S} := \{B_\rho(x) \text{ sfera aperta } : x \in \mathbb{Q}^n, \rho \in \mathbb{Q}\}$; allora se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, allora $A = \cup\{B \in \mathcal{S} : B \subset A\}$; quindi l'applicazione φ che ad ogni aperto A di $\mathbb{R}^n$ associa le sfere di $\mathcal{S}$ in esso contenute è iniettiva; notiamo che tale applicazione φ può essere vista come un'applicazione dagli aperti di $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q})$. Dato che $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$, si ha che la cardinalità degli aperti è minore o uguale a quella del continuo; ma la cardinalità degli aperti è sicuramente maggiore del continuo. Quindi dal teorema di Schr'oder-Bernstein segue che la cardinalità degli aperti, e quindi dei chiusi, di $\mathbb{R}^n$ è il continuo. □

Notiamo che la cardinalità degli insiemi chiusi di misura non nulla, o più in generale degli insiemi misurabili di misura non nulla è quella del continuo.[23].

Proposizione 15. *La cardinalità delle rette passanti per due punti distinti di un sottoinsieme infinito X di $\mathbb{R}^2$ è la stessa di X.*

Dimostrazione. Se indichiamo con $\mathcal{R}$ l'insieme delle rette passanti per punti distinti di X, si ha chiaramente che $\mathrm{card}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{card}(X \times X)$ e che $\mathrm{card}(\mathcal{R}) \geq \mathrm{card}(X)$; dato che $\mathrm{card}(X \times X) = \mathrm{card}(X)$ si ha quindi quanto voluto. □

Introduciamo ora i numeri ordinali.

Definizione 17. *Un insieme ordinato è detto* ben ordinato *se ogni suo sottoinsieme non vuoto ha un elemento più piccolo.*

[23]Fu Cantor a dimostrare che gli insiemi chiusi non numerabili hanno la cardinalità del continuo. Di conseguenza gli insiemi misurabili di misura non nulla hanno la cardinalità del continuo perchè contengono almeno un insieme chiuso di misura non nulla.

Per gli insiemi ben ordinati vale il

Teorema 30. ***(Teorema di induzione transfinita)*** *Sia S un sottoinsieme di un insieme ben ordinato X. Se per ogni $x \in X$ tale che $\{x' \in X : x' < x\} \subset S$ implica $x \in S$, allora $S = X$.*

Introduciamo quindi la definizione di numero ordinale

Definizione 18. *Sia X un insieme ben ordinato, $A \subset X$ è detto* segmento iniziale *di X se $\exists x_0 \in X$ tale che $A = \{x \in X : x \leq x_0\}$. Un segmento iniziale è detto* proprio *se non coincide con tutto X.*

Due insiemi X, Y si dicono avere lo stesso tipo d'ordine *se esiste un isomorfismo d'ordine fra X ed Y. Le classi di equivalenza rispetto alla relazione definita dall'avere lo stesso tipo di ordine sono dette* numeri ordinalli*, e saranno indicate con* $\mathrm{ord}(X)$*.*

Ciò che distingue il tipo d'ordine negli insiemi finiti è la cardinalità; quindi con il naturale n si indicherà l'ordinale degli insiemi aventi n elementi. il simbolo ω_0 denoterà l'ordinale dei naturali dotati dell'ordine naturale.

Dati gli insiemi ben ordinati $(X, \leq), (Y, \ll)$, e detti α, β rispettivamente i loro ordinali, definiamo

- $\alpha\beta := \mathrm{ord}(X \times Y)$, dove $X \times Y$ è dotato dell'ordine lessicografico
- $\alpha+\beta := \mathrm{ord}(X \cup Y)$, se X, Y sono disgiunti, e $X \cup Y$ è dotato dell'ordine $\preceq$ definito da $x \preceq y$ ssse $x, y \in X$ e $x \leq y$, oppure se $x \in X, y \in Y$, oppure se $x, y \in Y$ e $x \ll y$.

Definiamo quindi una relazione d'ordine sugli ordinali $\leq$: se $\alpha := \mathrm{ord}(X), \beta := \mathrm{ord}(Y)$ dove X, Y sono insiemi, diciamo che $\alpha < \beta$ ssse esiste un isomorfismo d'ordine fra X e un segmento iniziale proprio di Y. Diremo inoltre che $\alpha \leq \beta$ ssse $\alpha < \beta$ oppure $\alpha = \beta$.

Ci si potrebbe chiedere se $\mathbb{R}$ può essere ben ordinato; a ciò risponde il seguente teorema.

Teorema 31. ***(Teorema di Zermelo)*** *Ogni insieme è ben ordinabile.*

Tale teorema è equivalente al seguente

Assiome della Scelta Sia $\mathcal{A} := \{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi. Allora esiste una funzione $f : I \to \cup\mathcal{A}$, detta *funzione di scelta*, tale che per ogni i in I vale $f(i) \in A_i$.

9.5 Algebre booleane

Definizione 19. *Un'*algebra booleana *è una quaterna ordinata* $(\mathcal{A}, \vee, \wedge, ')$*, dove* $\mathcal{A}$ *è un insieme non vuoto,* $\vee, \wedge$ *sono operazioni binarie interne dette rispettivamente* unione *e* intersezione*,* $'$ *è un'operazione interna unaria detta* complementare*, che soddisfano per ogni* $a, b, c \in \mathcal{A}$ *a*

1. *unione ed intersezione sono commutative ed associative*
2. $(a \wedge b) \vee b = b = (a \vee b) \wedge b$
3. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
4. $(a \wedge a') \vee b = b = (a \vee a') \wedge b$

Presentiamo ora una serie di definizioni e di simboli

- Assumendo che $\mathcal{A}$ abbia almeno due elementi segue che esistono due elementi distinti indicati con $0, 1$ che soddisfano per ogni $a \in \mathcal{A}$ a $a \wedge a' = 0$ $a \vee a' = 1$
- $a \wedge b$ è detto il *complemento* di b in a, e denotato con $a - b$
- se $A = \{a_0, .., a_n\} \subset \mathcal{A}$ con $\sum A$ indichiamo $a_0 \vee a_1 \vee .. \vee a_n$
- due elementi $a, b \in \mathcal{A}$ sono detti *disgiunti* se $a \wedge b = 0$

Poniamo un ordine parziale $\leq$ su $\mathcal{A}$ come: $a \leq b$ ssse $a \wedge b = a$; con quest'ordine segue che 1 è l'elemento più grande, e 0 quello più piccolo.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ è detto *subalgebra* se è chiuso rispetto a $\vee, \wedge, '$.

Sia $c \in \mathcal{A}$; la *relativizzazione* dell'algebra $\mathcal{A}$ rispetto a c è definita e denotata con $(\mathcal{A}_c, \vee', \wedge', '')$, dove $\mathcal{A}_c := \{b \in \mathcal{A} : b \leq c\}$, e le operazioni sono definite come $a \vee' b := a \vee b$, $a \wedge' b := a \wedge b \wedge c$, $a'' := a' \wedge c$. Notiamo che $\mathcal{A}_c$ non è una subalgebra di $\mathcal{A}$.

Un elemento $b \in \mathcal{A}$ è detto *atomo* se $\mathcal{A}_b = \{0, b\}$.

Ogni algebra finita $\mathcal{A}$ è isomorfa all'algebra di $\mathcal{P}(X)$, dove X è un insieme finito; ne segue che pe ogni $b \in \mathcal{A}$, $b \neq 0$ vale $b = \sum\{a : a \leq b, a \text{ atomo }\}$; in particolare per ogni b esiste almeno un atomo a tale che $a \leq b$.

Un *automorfismo* di un'algebra booleana $\mathcal{A}$ è una biiezione $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ che rispetta le operazioni.

Una *misura* su un'algebra booleana $\mathcal{A}$ è una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ finitamente additiva, ovvero $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$ se $a \wedge b = 0$, e tale che $\mu(0) = 0$. Se G è un gruppo di automorfismi di $\mathcal{A}$, μ è detta *G-invariante* se per ogni $g \in G$ e $b \in \mathcal{A}$ vale $\mu(g(b)) = \mu(b)$.

Un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ è detto un *sottoanello* se per ogni $a, b \in \mathcal{A}$ si ha che $a \vee b$ e $a - b$ stanno in $\mathcal{B}$. Notiamo che una subalgebra è sempre un sottoanello.

Dimostriamo la seguente proprietà: siano a, b appartenenti all'algebra booleana $\mathcal{A}$; allora vale

$$a \wedge b = 0 \Rightarrow a \wedge b' = a$$

infatti $a = a \wedge 1 = a \wedge (b \vee b') = a \wedge b'$.

Introduciamo ora la nozione di ideale

Definizione 20. *Un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ dove $\mathcal{A}$ è un'algebra booleana, è detto* ideale *se $a \vee b \in \mathcal{I}$ per ogni $a, b, \in \mathcal{I}$ e $a \leq b \in \mathcal{I}$ implica $a \in \mathcal{I}$.*

Se $\mathcal{C}$ è un sottoanello dell'algebra booleana $\mathcal{A}$, un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ è detto ideale in $\mathcal{C}$ *se $a \vee b \in \mathcal{I}$ se $a, b \in \mathcal{I}$ e $a \leq b$ con $b \in \mathcal{I}$ implica $a \in \mathcal{I}$.*

Notiamo che se $\mathcal{I}$ è un'ideale e $\mathcal{C}$ un sottoanello dell'algebra booleana $\mathcal{A}$, allora $\mathcal{C} \cap \mathcal{I}$ è un idelae in $\mathcal{C}$.

Sia $\mathcal{I}$ un'ideale dell'algebra booleana $\mathcal{A}$, e consideriamo la relazione di equivalenza [24]data da $x \sim y$ ssse $(x - y) \vee (y - x) \in \mathcal{I}$. Consideriamo quindi il quoziente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, che risulta essere un'algebra booleana definendo le operazioni $[a] \vee [b] := [a \vee b], [a] \wedge [b] := [a \wedge b], [a]' := [a']$.

9.6 Reti

Definizione 21. *Sia D un insieme non vuoto, e $\leq$ una relazione su D. $(D, \leq)$ è detto* diretto *se*

1. *$\leq$ è riflessiva e transitiva*
2. *per ogni $x, y \in D$ esiste un $c \in D$ tale che $c \geq x$, $c \geq y$.*

Definizione 22. *Ogni funzione f su un insieme diretto $(D, \leq)$ è detta* rete. *Viene anche denotata con $\{f(i)\}_{i \in D}$, oppure con $\{f_i\}\_i \in D$.*

Definizione 23. *Sia $\{x_i\}_{i \in D}$ una rete con $x_i \in X$ per ogni $i \in D$, dove X è uno spazio topologico. Si dirà che la rete è* convergente *ad un $\widehat{x} \in X$ se per ogni intorno V di $\widehat{x}$ esiste un $i_0 \in D$ tale che $x_i \in V$ per ogni $i \geq i_0$.*

Definizione 24. *Siano X spazio vettoriale topologico, $K, V \subset X$ e $\{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto di K. $\{U_i\}_{i \in I}$ è detto V-*fine *se per ogni U_i esiste un $x_i \in X$ tale che $U_i + x_i \subset V$.*

---

[24] Riflessività e simmetria di $\sim$ sono evidenti. Dimostriamo la transitività. Siano $a, b, c \in \mathcal{A}$ tali che $a \sim b$ e $b \sim c$. Dato che ogni algebra booleana è isomorfa ad un'algebra di insiemi, possiamo ragionare direttamente su questo. Sia quindi $\mathcal{A}$ isomorfa a $\mathcal{P}(X)$, $A, B, C \subset X$ tali che $A \triangle B$, $B \triangle C$ appartengono all'ideale $\mathcal{I}$. Allora

$$(A \triangle C) \backslash (A \triangle B) \subset (B \triangle C).$$

E quindi $a \sim c$.

9.7 Misura di Peano-Jordan

Definizione 25. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato. Se*

$$v_* := \inf\{\sum_{i=1}^{n} |K_i| : \{K_i\}_{i=1}^{n} \text{ n-cubi tali che } A \subset \cup_{i=1}^{n} K_i\}$$

$$v^* := \sup\{\sum_{i=1}^{n} |K_i| : \{K_i\}_{i=1}^{n} \text{ n-cubi con parti interne sono disgiunte tali che } \cup_{i=1}^{n} K_i \subset A\}$$

coincidono, allora A è detto misurabile secondo Peano-Jordan *e il valore comune è detto* misura di Peano-Jordan *di A, e donotato con $v(A)$. L'algebra dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Peano-Jordan è indicata con $\mathcal{I}$.*

Notiamo che la famiglia degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan è contenuta nella famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, e su tale famiglia le due misure coincidono. Inoltre tale inclusione è stretta: infatti

$$Q := \{q \in \mathbb{Q}^n : q \in [0,1]^n\}$$

è misurabile secondo Lebesgue, ma non secondo Peano-Jordan, poichè $v_*(Q) = 0, v^*(Q) = 1$.

Vale il seguente

Teorema 32. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme magro misurabile secondo Peano-Jordan. Allora $v(A) = 0$.*

Dimostrazione. Essendo A magro, per il teorema di Baire A non ha parte interna, e quindi $v_*(A) = 0$. Quindi il fatto che A sia misurabile secondo Peano-Jordan implica che $v(A) = 0$. □

10 Appendice B

10.1 Decomposizioni: relazione fra la definizione classica e quella moderna

Definizione 26. *Due poligoni del piano sono detti* congruenti per sezionamento *se uno dei due può essere decomposto in un numero finito di poligoni, e questi possono essere riarrangiati tramite isometrie per ottenere l'altro.*

Notiamo innanzitutto che in queste scomposizioni i bordi dei poligoni vengono completamente ignorati. Nonostante questo è chiaro che due poliigoni equivalenti per sezionamento hanno la stessa area[25], e che l'equivalenza per sezionamento è una relazione di equivalenza: per quanto riguarda la transitività basta osservare che se A è equivalente a B, tramite i poligoni $\{A_i\}_{i=1}^n$ e le isometrie $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$, e B è equivalente a C tramite $\{B_j\}_{j=1}^m$ e $\{\tau_j\}_{j=1}^m$, allora dato che l'intersezione di due poligoni è ancora un poligono, si ha che A è equivalente a C tramite

$$A_{ij} := \sigma_i^{-1}(\sigma_i(A_i) \cap B_j)$$

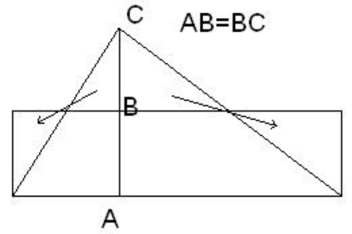
$$\varphi_{ij} := \tau_j \circ \sigma_i$$

Vale inoltre il seguente teorema:

Teorema 33. ***(Teorema di Bolyai-Gerwien)*** *Due poligoni sono equivalenti per sezionamento $\Leftrightarrow$ hanno la stessa area.*

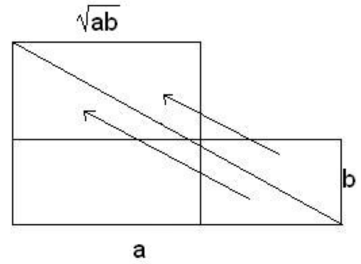
Dimostrazione. Grazie alla transitività proviamo che ogni poligono è equivalente ad un quadrato, che per la direzione precedentemente dimostrata del teorema, avrà la stessa area.

1^0*passo*: ogni triangolo è equivalente per sezionamento a un rettangolo di uguale base e metà altezza

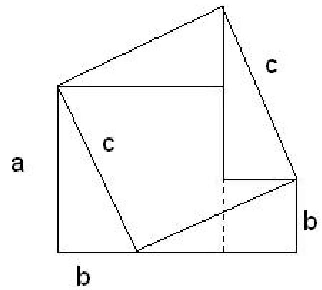


2^0*passo*: ogni rettangolo è equivalente per sezionamento ad un quadrato

[25] I pezzi usati nella scomposizione sono poligoni, quindi insiemi Lebesgue-misurabili.



3^0*passo*: ogni coppia di quadrati sono equivalenti per sezionamento ad un unico quadrato



4^0*passo*: ogni poligono può essere diviso in triangoli. Quindi utilizzando i passi precedenti si ha quanto voluto. □

La teoria dell'equivalenza per sezionamento in dimensioni più alte è più complessa; ad esempio il Terzo Problema di Hilber chiede se è possibile in $\mathbb{R}^3$ scomporre un tetraedro regolare in un cubo usando poliedri ed isometrie.

Nel 1900 Dehn diede risposta negativa al quesito di Hilbert; ma se la classe degli insiemei in cui fare la scomposizione si allarga, allora la risposta al problema può diventare positiva: infatti vedremo che questa è proprio una conseguenza del Paradosso di Banach-Tarski, se insiemi qualsiasi sono accettati per effettuare la scmposizione.

È naturale chiedersi se esista una relazione fra il concetto di equidecomponibilità classico e quello moderno insiemistico. A prima vista potrebbe sembrare non essercene nessuno, dato che dal punto di vista classico i bordi dei poligoni utilizzati per la scomposizione vengono utilizzati due volte, cosa non permessa nel contesto insiemistico, mentre quest'ultimo permette la scomposizione con un qualsiasi tipo di insiemi.

Teorema 34. *Se due poligoni sono equivalenti per sezionamento, allora sono equidecomponibili.*

Dimostrazione. Siano P_1, P_2 i due poligoni, e Q_1, Q_2 ripsettivamente l'unione delle parti interne dei poligoni in cui sono stati scomposti. Allora

$Q_1 \sim Q_2$. Mostriamo che $P_1 \sim Q_1$ e $P_2 \sim Q_2$.
Per far ciò consideriamo un insieme limitato A con interno non vuoto e un insieme da esso disgiunto T formato da un numero finto di segmenti limitati. Sia quindi D un disco contenuto in A di raggio r, e dividiamo ogni segmento di T in pezzi di lunghezza $< r$; siano θ una rotazione di ordine infinito di D attorno al suo centro, e R un raggio di D che ne esclude il centro; definendo quindi $\widetilde{R} := \cup_{i=0}^{\infty}\theta^i(R)$ abbiamo che $\theta(\widetilde{R}) \cap R = \emptyset = \theta(\widetilde{R}) \cap D\backslash(\widetilde{R})$.

Sia quindi s uno dei segmenti di lunghezza $< r$ in cui abbiamo scomposto i segmenti di T; allora:

$$D \cup s = (D\backslash\widetilde{R}) \cup \widetilde{R} \cup s \sim (D\backslash\widetilde{R}) \cup \theta(\widetilde{R}) \cup \sigma(s) \subset D$$

dove σ è un'isometria che porta s su R. Ovviamente $D \preceq D \cup s$, e quindi il Teorema di Banach-Scrhöder-Bernstein permette di concludere che $D \sim D \cup s$; è quindi possibile assorbire uno alla volta i segmenti di T.
Nel nostro caso specifico basta porre $A = Q_i, T = P_i\backslash Q_i$ $i = 1, 2$ per ottenere quanto voluto. $\square$

Grazie al Teorema di Bolyai-Gerwien possiamo quindi concludere che se due poligoni hanno la stessa area, allora sono equidecomponibili nel senso moderno del termine. L'inverso di ciò seguirà da un corollario, il quale prova l'esistenza di una misura finitamente additiva invariante per traslazioni su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ che coincide con l'area per i poligoni[26].

10.2 Tetrahedral snake

Il teorema presentato all'inizio del Capitolo 3 è dovuto a S̀wierczkowski, che questi ultimi usò per rispondere al seguente problema posto da Steinhaus sui tetraedri:

Definizione 27. *Un tetraedro di Steinhaus è una sequenza finita di tetraedri in $\mathbb{R}^3$ tali che ogni tetraedro condivida una sola faccia con il successivo, e che ogni tetraedro sia diverso dal predecessore del suo predecessore.*

Steinhaus chiedeva se era possibile che in un tetraedro di Steinhaus l'ultimo tetraedro sia una traslazione del primo.

La risposta negativa a questo problema viene dal fatto che le quattro riflessioni rispetto alle facce dei tetraedri non soddisfano ad alcuna relazione, ad eccezione del fatto che il quadrato di ciascuna è ovviamente l'identità.

[26]Vedi il capitolo Misure in Gruppi-Teorema dell'Estensione Invariante.

11 Bibliografia

1. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1985.

2. Jacobson, *Basic algebra*, W.H. Freeman and Company, 1985, (v.pp.277-287).

3. Hewitt-Stronberg, *Real and abstract analysis*, Springer, 1965, (v.pp.19-26).

4. Greco, *Calcolo differenziale e integrale.* Appunti del corso di analisi matematica a.a.2006-07

5. Greco, *Numeri cardinali e ordinali.* Appunti di matematiche complementari a.a.1989-90

6. Sierpiński, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficellement*, Fund.Math. 1, (1920), 112-115.

7. Banach, *Sur le problème de la mesure*, Fund.Math. 4, 1923, 7-33.

8. Banach, *Un théorème sur les transformations biunivoques*, Fund.Math. 6, 1924, 236-239.

9. Banch-Tarski, *Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents*, Fund.Math. 6, 1924, 244-277.

10. Hausdorff, *Bemerkung uber den Inhalt von Punktmengen*, Mat.Ann. 1914.

11. Łos-Ryll-Nardzewski, *On the applications of Tychonoff's theorem in mathematical proofs*, Fund.Math. 38, 1938, 233-237.

12. Von-Neumann, *Zur allgemeiner Theorie des Masses*, Found.Math. 13, 1929, 73-116.