L3 Méca, TD G2
du Me 09/10/13
Feuille 2, ex. 4

Conjecture (à faire avec $n=2$ ou 3 en calculant A, A^2, A^3)

$$A^k = \begin{array}{r} \\ \\ k^{\text{è}}\text{ pos.} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \hspace{4em} \overset{n-k+1^{\text{è}}\text{ position}}{\downarrow} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \end{pmatrix} \end{array} \qquad \forall k = 1 \dots n-1.$$

c.-à-d. $$\left(A^k\right)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+k \\ 1 & \text{si } j = i+(n-k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$ cas mutuellement exclus.

Preuve par récurrence : c'est vrai si $k=1$, on tombe bien sur A.
Supp. le résultat au rang k. Alors

$A^{k+1} = A A^k$ donc $\left(A^{k+1}\right)_{ij} = \sum_{t=1}^{n} \left(A^k\right)_{it} A_{tj}$ → $\neq 0$ seulement si $\boxed{t = j+1}$ si $j<n$ ou $\boxed{t = j-(n-1)}$ → possible seul^t si $j=n$ et alors $t=1$.

donc ces cas sont mutuellement exclus et donc

pour $\underline{j<n}$: $$\left(A^{k+1}\right)_{ij} = \left(A^k\right)_{i,t=j+1} \overset{\text{hyp. réc.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1+k \\ 1 & \text{si } j+1 = i+n-k, \text{ i.e } j = i+n-(k+1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $$\left(A^{k+1}\right)_{in} = \left(A^k\right)_{i,t=1} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k+1 \\ 1 & \text{si } 1 = i+(n-k) \text{ ie } i = 1-\overbrace{(n-k)}^{\geq 1 \text{ car } k \leq n-1} \rightsquigarrow \text{impossible} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } i = k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc ça coïncide avec la formule de $\left(A^{k+1}\right)_{ij}$ pour $j<n$.

Au final $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $$\left(A^{k+1}\right)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+k+1 \\ 1 & \text{si } j = i+n-(k+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on a démontré le résultat.

Maintenant pour $A^n = I_n$:

- soit on calcule $A^{n-1} \times A$ " à la main "
- soit on anticipe les questions suivantes,

A est diagonalisable avec $Sp(A) = \{ e^{2ik\pi/n} / k = 0 \dots n-1 \}$ noté u_k

$$\hookrightarrow A = P \begin{pmatrix} u_0 & & \\ & \ddots & \\ & & u_{n-1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

donc $A^n = P^n \begin{pmatrix} u_0^n & & \\ & \ddots & \\ & & u_{n-1}^n \end{pmatrix} (P^{-1})^n$

or $\forall k$, u_k est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité donc $u_k^n = 1$,

d'où $A^n = P^n \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} (P^{-1})^n = P^n I_n P^{-1} = P^n (P^{-1})^n = I_n$.

<u>Contre exemple pour une somme de matrices diagonalisables :</u>

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = x^2$ donc A a seulement 0 pour valeur propre, elle ne peut pas être diagonalisable sinon elle serait semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc nulle.

Mais $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour poly. carac. X^2+1 → 2 racines $\neq$ dans $\mathbb{C}$ donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ → poly carac. X^2-1 2 racines réelles $\neq$ donc diagonalisable.