Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Tomasz Tkocz
Nr albumu: 249057

Miara Gaussowska jednokładnych obrazów zbiorów wypukłych rotacyjnie niezmiennych w $\mathbb{C}^n$

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. Rafała Latały

Maj 2011

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data | Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data | Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W pracy rozważamy przypadek zespolony tzw. *S-nierówności*. Podaje ona oszacowanie na miarę Gaussa jednokładnych obrazów zbiorów wypukłych i rotacyjnie symetrycznych w $\mathbb{C}^n$. Postawiono hipotezę, że spośród wszystkich takich zbiorów miara cylindrów (tzn. zbiorów $\{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| \leqslant p\}$) maleje najszybciej przy jednokładnościach o skali mniejszej od 1.

Głównym wynikiem pracy jest udowodnienie prawdziwości hipotezy, ale przy dodatkowym założeniu, że miara Gaussa rozważanych zbiorów jest nie większa od pewnej stałej $c > 0.64$.

Słowa kluczowe

miara Gaussa, ciała wypukłe, nierówności izoperymetryczne

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

60E15 Inequalities; stochastic orderings
60G15 Gaussian processes

Tytuł pracy w języku angielskim

Gaussian measure of dilations of convex rotationally invariant sets in $\mathbb{C}^n$

Spis treści

Wprowadzenie

Przez **dylatację** na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ o skali $t > 0$ rozumiemy jednokładność o środku w 0 i skali t. Dla zbiorów A, B zawartych w $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ posługiwać się będziemy często notacją $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$ oraz $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Zatem obrazem zbioru A przy dylatacji o skali t jest zbiór tA. Weźmy borelowski zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$. Jak zmienia się miara Lebesgue'a jego dylatacji? To bardzo łatwe

$$|tA| = t^n |A|.$$

A jak zmienia się miara Gaussa γ_n (chodzi nam o standardową miarę Gaussa na $\mathbb{R}^n$, czyli o miarę z gęstością $\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-|x|^2/2}$, gdzie przez $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ oznaczamy standardową normę euklidesową wektora $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$)? Innymi słowy, co można powiedzieć o funkcji

$$f_A(t) = \gamma_n(tA), \qquad t > 0?$$

Hipoteza 1 (Shepp, 1969)**.** Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym i symetrycznym względem 0 (tzn. $A = -A$), zaś $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| \leqslant p\}$ niech będzie **pasem** o **szerokości** $2p$ tak dobranej, aby $\gamma_n(A) = \gamma_n(P)$. Wtedy

$$\begin{aligned} f_A(t) &\geqslant f_P(t), && \text{dla } t \geqslant 1, \\ f_A(t) &\leqslant f_P(t), && \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{aligned} \tag{S}$$

Historia tego problemu jest dosyć długa, bo został rozwiązany dopiero w 1999 roku. W skrócie można ją tak przedstawić

- 1969 — Shepp, postawienie problemu w nieopublikowanym manuskrypcie,
- 1974 — Sudakov, Zalgaller, [SudZal], rozwiązanie dla $n = 3$ nie tylko dla miary γ_3, ale dla dowolnej miary log-wklęsłej, rotacyjnie niezmienniczej,
- 1991 — Szarek, [Sza], postawienie problemu w publikacji i odtąd problem znany jako *S-conjecture*,
- 1993 — Kwapień, Sawa, [KwaSaw], rozwiązanie dla zbiorów 1-symetrycznych, tzn. symetrycznych względem wszystkich hiperpłaszczyzn $\{x_i = 0\}$,
- 1999 — Latała, Oleszkiewicz, [LatOle], rozwiązanie problemu.

Wydaje się, że sprawa *S-conjecture* jest tym samym zamknięta, ale można by tę listę wydłużyć stawiając nowe pytania. Na przykład, jakie zbiory są optymalne w klasie zbiorów symetrycznych (rezygnujemy z wypukłości)? A jakie w klasie zbiorów wypukłych? Można też zrobić wycieczkę w świat zespolony i właśnie tego dotyczy ta praca, która jest rozszerzoną wersją artykułu [Tko].

Podziękowania. Autor pragnie podziękować opiekunowi pracy profesorowi Rafałowi Latale za wprowadzenie w problemy związane z miarą Gaussa jak również za cenne uwagi, w szczególności za pokazanie kontrprzykładu, który jest treścią Uwagi 3.

Rozdział 1

Sformułowanie problemu i głównego wyniku

Niech ν_n będzie standardową miarą Gaussa na przestrzeni $\mathbb{C}^n$, tzn.

$$\nu_n(B) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{j(B)} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}x_n \mathrm{d}y_n,$$

dla zbioru borelowskiego $B \subset \mathbb{C}^n$, gdzie funkcja $j\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ oznacza standardowy izomorfizm zadany wzorem $j((x_1+iy_1, \ldots, x_n+iy_n)) = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$. Oznaczmy dla dowolnych wektorów $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ przez $\langle w, z \rangle = \sum_{k=1}^{n} w_k \bar{z}_k$ ich iloczyn skalarny na przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Normę zadaną przez ten iloczyn skalarny oznaczamy jako $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$. Podobnie jak w przypadku rzeczywistym, dla mierzalnego zbioru $A \subset \mathbb{C}^n$ definiujemy funkcję

$$\nu_A(t) = \nu_n(tA), \qquad t > 0.$$

Hipoteza 2. Niech $A \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem, który jest

- wypukły (w zwykłym rzeczywistym sensie, co oznacza, że dla każdego $t \in [0, 1]$ jest $tA + (1 - t)A \subset A$),
- **rotacyjnie symetryczny**, tzn. dla każdej liczby zespolonej $\lambda \in \mathbb{C}$ o module 1 jest $\lambda A = A$.

Niech $P = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |\langle z, v \rangle| \leqslant p\}$ będzie **cylindrem** takim, że $\nu_n(A) = \nu_n(P)$, gdzie $v \in \mathbb{C}^n$ jest wektorem jednostkowym, a $p \geqslant 0$ jest **promieniem** cylindra P. Wtedy

$$\begin{aligned} \nu_A(t) &\geqslant \nu_P(t), \qquad && \text{dla } t \geqslant 1, \\ \nu_A(t) &\leqslant \nu_P(t), && \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{aligned} \tag{T}$$

Jest to zespolony odpowiednik hipotezy Sheppa. Naśladując metodę z pracy [LatOle] częściowo rozstrzygnięto hipotezę. Główne twierdzenie jest następujące

Twierdzenie 1. *Istnieje stała uniwersalna $c > 0.64$ taka, że dla dowolnego zbioru wypukłego i rotacyjnie symetrycznego $A \subset \mathbb{C}^n$ o mierze $\nu_n(A) \leqslant c$ i cylindra $P = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| \leqslant p\}$ spełniającego $\nu_n(A) = \nu_n(P)$ mamy*

$$\nu_n(tA) \leqslant \nu_n(tP), \qquad \textit{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{$*$}$$

Rozdział 2

Dowód głównego twierdzenia

W tym rozdziale przedstawimy dowód Twierdzenia 1. Idea dowodu polega na redukcji przypadku dowolnego ciała wypukłego w $\mathbb{C}^n$ do ciała wypukłego w $\mathbb{R}^3$ szczególnej postaci, dla którego będziemy mogli wszystko policzyć.

Na początku wprowadźmy jeszcze trochę oznaczeń. Przez γ_n oznaczamy standardową miarę Gaussa na przestrzeni $\mathbb{R}^n$, natomiast

$$\gamma_n^+(A) := \underline{\lim}_{h\to 0+}(\gamma_n(A^h) - \gamma_n(A))/h$$

oznacza gaussowską miarę brzegu zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$, gdzie

$$A^h := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, A) \leqslant h\}$$

jest h-otoczką zbioru A. Analogicznie definiujemy $\nu_n^+(A)$. Kulę otwartą o środku w punkcie p i promieniu r oznaczamy przez $B(p,r)$ (z kontekstu zawsze będzie wynikało czy chodzi nam o kulę w $\mathbb{C}^n$ względem normy $\|\cdot\|$, czy w $\mathbb{R}^n$ względem normy $|\cdot|$). Ponadto, będziemy używać funkcji

$$\Phi(x) = \gamma_1((-\infty, x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t,$$
$$T(x) = 1 - \Phi(x).$$

Przypomnijmy też dwie ważne nierówności dotyczące miary Gaussa, z których później będziemy korzystać.

Z klasycznej nierówności izoperymetrycznej dla miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$ wiemy, że miara przyrasta najwolniej dla kul, tzn. dla zbioru borelowskiego $A \subset \mathbb{R}^n$, jeśli dobierzemy r tak, aby $|A| = |B(0,r)|$, to $|A_t| \geqslant |B(0, r+t)|$, dla $h > 0$. Na początku lat 70 ubiegłego wieku Borell, [Bor1], i niezależnie Sudakov i Tsierl'son, [SudTsi] udowodnili, że dla miary Gaussa optymalne są półprzestrzenie.

Twierdzenie 2. *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem borelowskim, zaś $H = (-\infty, a] \times \mathbb{R}^{n-1}$ półprzestrzenią afiniczną taką, że $\gamma_n(A) = \gamma_n(H) = \Phi(a)$. Wtedy*

$$\gamma_n(A_t) \geqslant \gamma_n(H_t) = \Phi(a+t), \qquad \textit{dla } t > 0. \tag{Isop}$$

Dla miary Gaussa znana jest też nierówność typu Brunna-Minkowskiego silniejsza od log-wklęsłości tej miary, tzn. od nierówności $\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \gamma_n(A)^\lambda \gamma_n(B)^{1-\lambda}$. Chodzi o nierówność Ehrharda.

Twierdzenie 3. *Niech $A, B \subset \mathbb{R}^n$ będą zbiorami borelowskimi. Wówczas dla $\lambda \in [0,1]$*

$$\Phi^{-1}\Big(\gamma_n\left(\lambda A + (1-\lambda)B\right)\Big) \geqslant \lambda\Phi^{-1}\Big(\gamma_n(A)\Big) + (1-\lambda)\Phi^{-1}\Big(\gamma_n(B)\Big) \qquad \text{(Ehr)}$$

Pierwszy dowód tej nierówności został podany przez Ehrharda, [Ehr], w przypadku gdy oba zbiory są wypukłe, ale Borell udowodnił, że założenie wypukłości można opuścić, [Bor2].

2.1. Redukcja wymiaru

Będziemy teraz naśladować metodę użytą w pracy [LatOle] ażeby zredukować wymiar naszego problemu. Dokonamy tego w trzech krokach — kolejnych faktach. Dla wygody czytelnika szczegółowo przepisano dowody z [LatOle] na nasz zespolony przypadek.

Fakt 1 (wystarczy pochodna w $t = 1$)**.** *Dla zbioru $A \subset \mathbb{C}^n$ dobieramy cylinder P tak, aby $\nu_n(A) = \nu_n(P)$. Wówczas nierówność $(*)$ zachodzi dla wszystkich zbiorów wypukłych i rotacyjnie niezmienniczych $A \subset \mathbb{C}^n$ takich, że $\nu_n(A) \leqslant c$ wtedy i tylko wtedy gdy dla nich zachodzi nierówność*

$$\nu_A'(1) \geqslant \nu_P'(1).$$

Dowód. „$\Longrightarrow$" To jest bardzo łatwe, bo wobec wyboru cylindra P jest $\nu_A(1) = \nu_P(1)$, więc z nierówności $(*)$

$$\nu_A'(1) \underset{h\to 0+}{\longleftarrow} \frac{\nu_A(1-h) - \nu_A(1)}{-h} \geqslant \frac{\nu_P(1-h) - \nu_P(1)}{-h} \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} \nu_P'(1).$$

„$\Longleftarrow$" Określamy funkcję $h\colon (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ poprzez warunek

$$\nu_A(t) = \nu_P(h(t)).$$

Naszym celem jest wykazać, że dla $t \leqslant 1$ jest $h(t) \leqslant t$. Zauważmy, że $\nu_A(t) = \nu_P(h(t))$ jest równoważne równości $\nu_{tA}(1) = \nu_{h(t)P}(1)$, a ona, zakładamy, że implikuje nierówność dla pochodnych

$$\nu_{tA}'(1) \geqslant \nu_{h(t)P}'(1).$$

Ale $\nu_{tA}'(1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=1} \nu_{tA}(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=1} \nu_A(ts) = t\nu_A'(t)$ i tak samo $\nu_{h(t)P}'(1) = h(t)\nu_P'(h(t))$. Różniczkując zaś $\nu_A(t) = \nu_P(h(t))$ dostajemy, że $\nu_A'(t) = h'(t)\nu_P'(h(t))$ i zbierając to razem widzimy, że nierówność $(*)$ implikuje dla $t \leqslant 1$

$$th'(t) \geqslant h(t),$$

więc

$$\left(\frac{h(t)}{t}\right)' \geqslant 0, \qquad \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Oznacza to, że funkcja $\frac{h(t)}{t}$ jest niemalejąca, a to kończy dowód, bowiem dla $t \leqslant 1$ mamy $\frac{h(t)}{t} \leqslant \frac{h(1)}{1} = 1$. □

Fakt 2 (wypukłość)**.** *Niech $w = \sup\{r \geqslant 0 \mid B(0,r) \subset A\}$ będzie* ***promieniem*** *zbioru wypukłego rotacyjnie symetrycznego $A \subset \mathbb{C}^n$. Wtedy*

$$\nu_A'(1) \geqslant w\nu_n^+(A).$$

Dowód. Bez utraty ogólności można zakładać, że $0 < w < \infty$, bo jeśli A jest zawarty w pewnej $n-1$ wymiarowej podprzestrzeni, to jest miary 0 i teza jest jasna. W przeciwnym przypadku, zawiera nietrywialną kulę (z wypukłości i symetrii), więc $w > 0$, zaś gdyby $w = \infty$, to $A = \mathbb{C}^n$ i wtedy też teza jest oczywista.

Mamy $B(0, w) \subset A$, więc z wypukłości, dla $x \in A$, zachodzi

$$tx + (1-t)B(0, w) \subset A,$$

więc

$$x + B\left(0, \left(\frac{1}{t} - 1\right) w\right) \subset \frac{1}{t} A,$$

czyli przyjmując oznaczenie $1/t = 1 + h$, z dowolności x, mamy

$$A + B(0, hw) \subset (1+h)A.$$

Stąd szacujemy tak

$$\begin{aligned} \nu_A'(1) &= \lim_{h\to 0+} \frac{\nu_A(1+h) - \nu_A(h)}{h} = w \lim_{h\to 0+} \frac{\nu_n((1+h)A) - \nu_n(A)}{wh} \\ &\geqslant w\underline{\lim}_{h\to 0+} \frac{\nu_n(A + B(0, hw)) - \nu_n(A)}{hw} = w\nu_n^+(A). \end{aligned}$$

□

Uwaga 1. Dla cylindra P mamy równość

$$\nu_P'(1) = p\nu_n^+(P).$$

Przypomnijmy, że na mocy Faktu 1 naszym celem jest udowodnić, że $\nu_A'(1) \geqslant \nu_P'(1)$. Wystarczy zatem udowodnić

$$w\gamma_n^+(A) \geqslant p\gamma_n^+(P).$$

Rotacyjna symetria zbioru A implikuje, że A jest zawarty w pewnym cylindrze o promieniu w. Istotnie, z definicji liczby w istnieje punkt, powiedzmy a, z domknięcia zbioru A taki, że $\|a\| = w$. Używając wypukłości A wnioskujemy, że istnieje hiperpłaszczyzna podpierająca $\{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Re}\langle z, a\rangle = \|a\|^2\}$. Z rotacyjnej symetrii mamy $A \subset \{z \in \mathbb{C}^n \mid |\langle z, a\rangle| \leqslant \|a\|^2\}$. Dzięki niezmienniczości miary Gaussa względem przekształceń unitarnych możemy bez utraty ogólności zakładać, że $a = \|a\| e_1$. Wówczas

$$A \subset \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| \leqslant w\}.$$

Gdy zbiór A jest w takiej pozycji możemy zastosować **symetryzację Ehrharda**, [Ehr], tzn. dla punktu $z = x + iy$ o module mniejszym niż w zastępujemy cięcie

$$A_z = \{(z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \mid (z, z_2, \ldots, z_n) \in A\},$$

półprostą rzeczywistą $(-\infty, f(|z|))$ o tej samej mierze gaussowskiej co A_z. W ten sposób otrzymujemy zbiór w $\mathbb{R}^3$

$$A^e = \left\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \leqslant f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant w\right\},$$

gdzie $f\colon [0, w] \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) := \Phi^{-1}\left(\nu_{n-1}\left(A_z\right)\right).$$

Funkcja f jest dobrze zdefiniowana (wobec rotacyjnej symetrii zbioru A).

Fakt 3 (kluczowe własności symetryzacji Ehrharda)**.** *Symetryzacja Ehrharda ma następujące własności*

(i) *zachowuje miarę* $\nu_n(A) = \nu_3(A^e)$*,*

(ii) *zachowuje cylindry, tzn. dla zbioru* $P = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| \leqslant p\}$ *jego symetryzacja* P^e *też jest cylindrem* $\{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leqslant p\} \times \mathbb{R}$ *o tym samym promieniu co cylinder* P *oraz* $\nu_n^+(P) = pe^{-p^2/2} = \gamma_3^+(\widetilde{P})$*,*

(iii) *nie powiększa brzegu, tzn.* $\nu_n^+(A) \geqslant \gamma_3^+(A^e)$*,*

(iv) *funkcja* f *opisująca zbiór* A *jest wklęsła.*

Dowód. (i), (ii) Oczywiste.

(iii) Wobec *(i)* wystarczy udowodnić, że $\nu_n(A+B(0,\epsilon)) \geqslant \gamma_3(A^e+B(0,\epsilon))$, bo wtedy już będziemy mieć, że

$$\nu_n^+(A) = \underline{\lim}_{\epsilon\to 0+}\frac{\nu_n(A+B(0,\epsilon)) - \nu_n(A)}{\epsilon} \geqslant \underline{\lim}_{\epsilon\to 0+}\frac{\gamma_3(A^e+B(0,\epsilon)) - \gamma_3(A^e)}{\epsilon} = \gamma_3^+(A^e).$$

Nierówność $\nu_n(A+B(0,\epsilon)) \geqslant \gamma_3(A^e+B(0,\epsilon))$ jest z kolei implikowana przez twierdzenie Fubiniego, gdy dla każdego wektora $z \in \mathbb{R}^2$ o długości mniejszej od $w+\epsilon$ będzie

$$\nu_{n-1}\left((A+B(0,\epsilon))_z\right) \geqslant \gamma_1\left((A^e+B(0,\epsilon))_z\right).$$

Udowodnimy teraz tę nierówność. Ustalmy $t \in (A^e+B(0,\epsilon))_z$, tzn. $(z,t) \in A^e+B(0,\epsilon)$. Istnieją wtedy takie z' i t', że $(z',t') \in A^e$ i $\underbrace{|z-z'|}_{\epsilon_z}{}^2 + \underbrace{|t-t'|}_{\epsilon_t}{}^2 \leqslant \epsilon^2$. Wobec

$$(A+B(0,\epsilon))_z \supset A_{z'} + B(0,\epsilon_t),$$

jest

$$\nu_{n-1}\left((A+B(0,\epsilon))_z\right) \geqslant \nu_{n-1}\left(A_{z'}+B(0,\epsilon_t)\right) \underset{\text{(Isop)}}{\geqslant} \nu_{n-1}(H+B(0,\epsilon_t)),$$

gdzie H to półprzestrzeń tej samej miary ν_{n-1} co $A_{z'}$. Używając gaussowskiej dystrybuanty Φ możemy zapisać, że

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}\Big(\nu_{n-1}\left((A+B(0,\epsilon))_z\right)\Big) &\geqslant \Phi^{-1}\Big(\nu_{n-1}(H+B(0,\epsilon_t))\Big) = \Phi^{-1}\Big(\nu_{n-1}(H)\Big) + \epsilon_t \\ &= \Phi^{-1}\Big(\nu_{n-1}(A_{z'})\Big) + \epsilon_t \geqslant t' + \epsilon_t \geqslant t,\end{aligned}$$

gdzie $\Phi^{-1}\Big(\nu_{n-1}(A_{z'})\Big) \geqslant t'$ jest konsekwencją tego, że $(z',t') \in A^e$. Zatem

$$\nu_{n-1}\left((A+B(0,\epsilon))_z\right) \geqslant \Phi(t) = \gamma_1((-\infty,t))$$

i biorąc supremum po $t \in (A^e+B(0,\epsilon))_z$ mamy to o co chodziło.

(iv) Wypukłość zbioru A implikuje, że dla dowolnych $\lambda \in [0,1]$ i $u,v \in \mathbb{C}$ o module mniejszym od promienia w zbioru A

$$A_{\lambda u+(1-\lambda)v} \supset \lambda A_u + (1-\lambda)A_v,$$

skąd wobec nierówności Ehrharda, [Ehr], otrzymujemy wklęsłość funkcji f (możemy bez utraty ogólności zakładać, że wektory u, v są wybrane tak, aby miały ten sam kierunek i zwrot)

$$\begin{aligned} f\left(\lambda|u|+(1-\lambda)|v|\right) &= f\left(|\lambda u+(1-\lambda)v|\right) = \Phi^{-1}\Big(\nu_{n-1}(A_{\lambda u+(1-\lambda)v})\Big) \\ &\geqslant \Phi^{-1}\Big(\nu_{n-1}\left(\lambda A_u+(1-\lambda)A_v\right)\Big) \\ &\overset{\text{(Ehr)}}{\geqslant} \lambda\Phi^{-1}\Big(\nu_{n-1}(A_u)\Big)+(1-\lambda)\Phi^{-1}\Big(\nu_{n-1}(A_v)\Big) \\ &= \lambda f(|u|)+(1-\lambda)f(|v|). \end{aligned}$$

□

Podsumowując, wobec Faktów 1 - 3 i odpowiedniej aproksymacji funkcji f widzimy, że aby udowodnić Twierdzenie 1 wystarczy udowodnić

Twierdzenie 4. *Istnieje stała uniwersalna $c > 0.64$ o następującej własności. Niech $A \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem postaci*

$$A = \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \leqslant f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \sqrt{x^2+y^2} < w\right\},$$

gdzie $f\colon [0,w) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wklęsłą, nierosnącą funkcją gładką taką, że $f(x) \xrightarrow[x\to w-]{} -\infty$. Niech $P = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant p\} \subset \mathbb{R}^3$ będzie cylindrem o tej samej mierze co zbiór A, tzn., $\gamma_3(A) = \gamma_3(P) = 1 - e^{-p^2/2}$. Wówczas

$$w\gamma_3^+(A) \geqslant p\gamma_3^+(P), \tag{2.1}$$

zakładając, że $\gamma_3(A) \leqslant c$.

2.2. Dowód nierówności izoperymetrycznej

Dowód Twierdzenia 4. Naśladując [LatOle], definiujemy dla ustalonego $x \in [0,w]$ zbiory

$$\begin{aligned} A(x) &= A \cup \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < x\} \times \mathbb{R}, \\ P(x) &= \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < a(x)\} \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gdzie funkcja $a(x)$ jest zdefiniowana za pomocą równania

$$\gamma_3(A(x)) = \gamma_3(P(x)).$$

Mamy $\partial A(x) = B_1(x) \cup B_2(x)$, gdzie $B_1(x) = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid |z| = x, t \geqslant f(|z|)\}$, $B_2(x) = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid |z| > x, t = f(|z|)\}$. Niech

$$L(x) = w\gamma_3^+(B_2(x)) + x\gamma_3^+(B_1(x)) - a(x)\gamma_3^+(P(x)), \qquad x \in [0,w].$$

Ponieważ $A(w)$ jest cylindrem o promieniu w, to mamy $L(w) = 0$. Zauważmy również, że $L(0) = w\gamma_3^+(A) - p\gamma_3^+(P)$. Dlatego wystarczy udowodnić, że funkcja L jest nierosnąca.

Możemy łatwo obliczyć wyrazy pojawiające się w definicji funkcji L ażeby potem znaleźć $L'(x)$. Mianowicie mamy

$$\begin{aligned}
\gamma_3^+(B_2(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^w t \exp\left(-\frac{t^2+f(t)^2}{2}\right) \sqrt{1+f'(t)^2}\mathrm{d}t, \\
\gamma_3^+(B_1(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^{2\pi} \int_{f(x)}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2+t^2}{2}\right) x \ \mathrm{d}t\mathrm{d}\phi \\
&= xe^{-x^2/2}(1-\Phi(f(x))) = xe^{-x^2/2}T(f(x)), \\
\gamma_3^+(A(x)) &= a(x)e^{-a(x)^2/2}.
\end{aligned}$$

Wstawiając to do definicji L otrzymujemy

$$\begin{aligned}
L(x) =& \frac{w}{\sqrt{2\pi}} \int_x^w t \exp\left(-\frac{t^2+f(t)^2}{2}\right) \sqrt{1+f'(t)^2}\mathrm{d}t + x^2e^{-x^2/2}T(f(x)) \\
&- a(x)^2e^{-a(x)^2/2}.
\end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
\gamma_3(A(x)) =& \gamma_3\left(\{z\in\mathbb{R}^2 \mid |z|<x\}\times\mathbb{R}\right) \\
&+ \gamma_3\left(\{(z,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R} \mid |z|>x, t\leqslant f(|z|)\}\right) \\
=& 1-e^{-x^2/2} + \int_x^w te^{-t^2/2}\Phi(f(t))\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Zatem

$$1-e^{-a(x)^2/2} = \gamma_3(P(x)) = \gamma_3(A(x)) = 1-e^{-x^2/2} + \int_x^w te^{-t^2/2}\Phi(f(t))\mathrm{d}t,$$

i różniczkując po x dostajemy

$$a'(x)a(x)e^{-a(x)^2/2} = xe^{-x^2/2}(1-\Phi(f(x))) = xe^{-x^2/2}T(f(x)). \tag{2.2}$$

Mając to obliczamy L'. Mamy

$$\begin{aligned}
L'(x) =& -\frac{w}{\sqrt{2\pi}} x \exp\left(-\frac{x^2+f(x)^2}{2}\right) \sqrt{1+f'(x)^2} \\
&+ e^{-x^2/2}\left(2xT(f(x)) - x^2\frac{e^{-f(x)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}f'(x) - x^3T(f(x))\right) \\
&- \left(2-a(x)^2\right) xe^{-x^2/2}T(f(x)).
\end{aligned}$$

Stąd $L'\leqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w\sqrt{1+f'(x)^2} + xf'(x) \geqslant (a(x)^2-x^2)\sqrt{2\pi}e^{f(x)^2/2}T(f(x)), \qquad x\in[0,w].$$

Ponieważ $f'\leqslant 0$ (f jest nierosnąca) i $\inf_{t\leqslant 0}(w\sqrt{1+t^2}+xt) = \sqrt{w^2-x^2}$ będziemy mieli $L'\leqslant 0$ jeśli pokażemy, że

$$\sqrt{w^2-x^2} \geqslant (a(x)^2-x^2)\sqrt{2\pi}e^{f(x)^2/2}T(f(x)), \qquad x\in[0,w]. \tag{2.3}$$

Szacując $a(x)^2 - x^2$ możemy udowodnić powyższą nierówność w pewnych specjalnych przypadkach. Zauważmy, że monotoniczność funkcji f implikuje, że $A(x) \subset \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < x\} \times \mathbb{R} \cup \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid x \leqslant |z| \leqslant w, t \leqslant f(x)\}$, więc

$$1 - e^{-a(x)^2/2} = \gamma_3(A(x)) \leqslant (1 - e^{-x^2/2}) + (e^{-x^2/2} - e^{-w^2/2})\Phi(f(x)),$$

zatem

$$a(x)^2 - x^2 \leqslant -2 \ln\left(T(f(x)) + \Phi(f(x))e^{-(w^2-x^2)/2}\right). \tag{2.4}$$

Wobec tej nierówności by wykazać (2.3) wystarczy udowodnić, że

$$\sqrt{w^2 - x^2} \geqslant -2\sqrt{2\pi}e^{f(x)^2/2}T(f(x)) \ln\left(T(f(x)) + \Phi(f(x))e^{-(w^2-x^2)/2}\right). \tag{2.5}$$

W ogólności ta nierówność nie zachodzi. Jednakże, Lemat 1, którego dowód znajduje się w rozdziale 4, pozwala poradzić sobie w pewnych przypadkach.

Wprowadźmy funkcje $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$, $G\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ zadane wzorami

$$F(y) = -\sqrt{2\pi}e^{y^2/2}T(y) \ln T(y), \tag{2.6}$$

$$G(y) = \frac{y}{2(1 - e^{-y^2/2})}. \tag{2.7}$$

Zaobserwujmy, że F jest rosnąca i na (por. Lemat 2). Będziemy jeszcze potrzebowali stałej

$$H = F^{-1}\left(G\left(\sqrt{8/\pi}\right)\right).$$

Lemat 1. *Niech albo*

(i) $0 \leqslant u \leqslant \sqrt{8/\pi}$, $y \in \mathbb{R}$, *albo*

(ii) $u > \sqrt{8/\pi}$, $y \leqslant H$.

Wtedy

$$-2\sqrt{2\pi}e^{y^2/2}T(y) \ln\left(T(y) + \Phi(y)e^{-u^2/2}\right) \leqslant u.$$

Stosując Lemat 1 dla $u = \sqrt{w^2 - x^2}$, $y = f(x)$, dostajemy żądaną nierówność (2.5) dla x takich, że $\sqrt{w^2 - x^2} \leqslant \sqrt{8/\pi}$ lub $\sqrt{w^2 - x^2} > \sqrt{8/\pi}$ i $f(x) \leqslant H$.

Dlatego, pozostaje udowodnić (2.3) dla x spełniających $\sqrt{w^2 - x^2} > \sqrt{8/\pi}$ i $f(x) > H$. Zauważmy, że na podstawie (2.2)

$$(a(x)^2 - x^2)' = 2(a(x)a'(x) - x) = 2x\left(e^{(a(x)^2 - x^2)/2}T(f(x)) - 1\right),$$

ale dzięki (2.4) otrzymujemy

$$e^{(a(x)^2 - x^2)/2} < 1/T(f(x)),$$

skąd

$$(a(x)^2 - x^2)' < 0.$$

Zatem funkcja $[0,w] \ni x \longmapsto a(x)^2 - x^2 \in [0,\infty)$ jest malejąca. Wobec tego

$$\sup_{x \in [0,w]} (a(x)^2 - x^2) = a(0)^2 = p^2.$$

Ponadto, funkcja $x \longmapsto e^{f(x)^2/2}T(f(x))$ jest nierosnąca na przedziale $[0,w]\cap\{x|f(x)>0\}$ jako złożenie nierosnącej funkcji f i rosnącej funkcji $y \longmapsto e^{y^2/2}T(y)$ na $(0,\infty)$ ([LatOle, Lemat 1]). Tym samym

$$\sup\left\{e^{f(x)^2/2}T(f(x)) \mid f(x)>H\right\} = e^{H^2/2}T(H).$$

Biorąc pod uwagę te dwie obserwacje i uwzględniając założenie $c \geqslant \gamma_3(A) = \gamma_3(P) = 1 - e^{-p^2/2}$, tzn. $p^2 \leqslant -2\ln(1-c)$, dostajemy, że (2.3) zachodzi również dla x takich, że $\sqrt{w^2-x^2} > \sqrt{8/\pi}$ i $f(x) > H$. Istotnie

$$\begin{aligned}(a(x)^2 - x^2)\sqrt{2\pi}e^{f(x)^2/2}T(f(x)) &\leqslant \sqrt{2\pi}p^2e^{H^2/2}T(H)\\ &\leqslant -2\sqrt{2\pi}\ln(1-c)e^{H^2/2}T(H)\\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} < \sqrt{w^2-x^2},\end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość bierze się z definicji stałej c. Mianowicie przyjmujemy

$$c = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\pi e^{H^2/2}T(H)}\right) > 0.64,$$

co kończy dowód. □

Uwaga 2. Nietrudno sprawdzić, że rzeczywiście $c > 0.64$. Po pierwsze, sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem, że $G(\sqrt{8/\pi}) > F(0.7)$, więc $H > 0.7$ wobec monotoniczności funkcji F. Po drugie, zauważamy, że zależność c jako funkcji H jest rosnąca, gdyż było wspomniane, że funkcja $y \longmapsto e^{y^2/2}T(y)$ na $(0,\infty)$ maleje. Zatem

$$c > 1 - \exp\left(-\frac{1}{\pi e^{0.7^2/2}T(0.7)}\right) > 0.64. \quad \square$$

Z nierówności izoperymetrycznej (2.1) udowodnionej w Twierdzeniu 4, powiedzieliśmy, że wynika własność

$$\nu_n(A) = \nu_n(P) \leqslant c \quad \text{implikuje} \quad \nu_A'(1) \geqslant \nu_P'(1).$$

To z kolei, jak zauważyliśmy w Fakcie 1, daje porównanie miary dylatacji zbioru A i miary dylatacji cylindra P przy kurczeniu tych zbiorów (tzn. przy dylatacjach o skali mniejszej od 1) — Twierdzenie 1. Ale z dowodu Faktu 1 widać, że nierówność pomiędzy pochodnymi w $t = 1$ pozwala również kontrolować do pewnego stopnia co się dzieje przy rozciąganiu (tzn. przy dylatacjach o skali większej od 1) naszych zbiorów.

Wniosek 1. *Dla dowolnego zbioru wypukłego i rotacyjnie symetrycznego $A \subset \mathbb{C}^n$, o mierze $\nu_n(A) \leqslant c$ i cylindra P spełniającego $\nu_n(A) = \nu_n(P)$ mamy*

$$\nu_n(tA) \geqslant \nu_n(tP), \qquad \text{dla } 1 \leqslant t \leqslant t_0, \tag{2.8}$$

gdzie liczba $t_0 \geqslant 1$ jest zadania równaniem $\nu_n(t_0A) = c$.

Dowód polega na naśladowaniu dowodu Faktu 1. Definiujemy funkcję $h(t)$ przy pomocy równania $\nu_A(t) = \nu_n(h(t)P)$ i korzystając z oszacowania na pochodną w $t = 1$ słusznego dla wszystkich zbiorów o mierze mniejszej od c pokazujemy, że $(h(t)/t)' \geqslant 0$, dla $t \in [1, t_0]$, więc $h(t) \geqslant t$, dla $t \in [1, t_0]$.

Rozdział 3

Kilka uwag

Uwaga 3. Ogólnie, bez założenia o nie za dużej mierze zbioru A, Twierdzenie 4 jest nieprawdziwe. Aby to zobaczyć, weźmy walec ścięty $A = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid |z| \leqslant w, t \leqslant y\}$ o promieniu w i wysokości y. To co prawda nie jest zbiór jak w założeniach Twierdzenia 4, tzn., nie jest on zadany jako podwykres pewnej funkcji gładkiej, ale dzięki prostej aproksymacji możemy usunąć tę lukę. Weźmy cylinder $P = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leqslant p\} \times \mathbb{R}$ o tej samej mierze co A, co oznacza, że

$$\Phi(y)(1 - e^{-w^2/2}) = \gamma_3(A) = \gamma_3(P) = 1 - e^{-p^2/2}.$$

Pokażemy, że dla dostatecznie dużych w i y zachodzi nierówność przeciwna do nierówności (2.1) z Twierdzenia 4

$$w\gamma_3^+(A) < p\gamma_3^+(P).$$

Istotnie, weźmy takie parametry naszego walca ściętego, aby

$$e^{-w^2/2} = T(y), \quad y > 0.$$

Wówczas $1 - e^{-w^2/2} = \Phi(y)$. Aby uprościć dalsze rachunki zdefiniujmy funkcję

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{y^2/2}T(y)}. \tag{3.1}$$

Teraz związek między w i y może być zapisany jako $w^2 = -2\ln T(y) = y^2 + 2\ln\left(\sqrt{2\pi}g(y)\right)$. Ponadto mamy

$$y < g(y) < \sqrt{y^2+2}, \qquad y > 0, \tag{3.2}$$

gdzie pierwsza nierówność wynika ze standardowego oszacowania ogona gaussowskiego T, mianowicie dla $y > 0$ mamy

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_y^\infty e^{-t^2/2}\mathrm{d}t < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_y^\infty \frac{t}{y}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}.$$

Druga nierówność wynika z [LatOle, Lemat 2]. Dlatego

$$\begin{aligned}
w\gamma_3^+(A) &= w\left(we^{-w^2/2}\Phi(y) + \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}(1-e^{-w^2/2})\right) \\
&= T(y)\left(w^2\Phi(y) + w\Phi(y)\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}T(y)}\right) < T(y)\left(w^2\Phi(y) + wg(y)\right) \\
&< T(y)\left(w^2\Phi(y) + \sqrt{y^2 + 2\ln\left(\sqrt{2\pi}g(y)\right)}\sqrt{y^2+2}\right) \\
&\leqslant T(y)\left(w^2\Phi(y) + y^2 + \ln\left(\sqrt{2\pi}g(y)\right) + 1\right) \\
&= T(y)\left(w^2\left(1+\Phi(y)\right) + 1 - \ln\left(\sqrt{2\pi}g(y)\right)\right).
\end{aligned}$$

Weźmy y tak, aby

$$1 - \ln\left(\sqrt{2\pi}g(y)\right) < -2(1+\Phi(y))\ln\left(1+\Phi(y)\right).$$

(To, że taki y istnieje wynika stąd, że ta nierówność jest prawdziwa dla dużych y.) Wtedy

$$\begin{aligned}
w\gamma_3^+(A) &< T(y)\left(w^2\left(1+\Phi(y)\right) - 2(1+\Phi(y))\ln\left(1+\Phi(y)\right)\right) \\
&= -2T(y)\left(1+\Phi(y)\right)\ln\left(e^{-w^2/2}\left(1+\Phi(y)\right)\right) \\
&= p^2e^{-p^2/2} = p\gamma_3^+(P),
\end{aligned}$$

gdzie druga nierówność zachodzi ponieważ

$$e^{-p^2/2} = 1 - \Phi(y)(1-e^{-w^2/2}) = T(y) + \Phi(y)e^{-w^2/2} = T(y)\left(1+\Phi(y)\right).$$

W poprzedniej uwadze widzieliśmy, że założenie o nie za dużej mierze zbioru w Twierdzeniu 4 jest istotne. To założenie i technika redukcji, którą użyliśmy powodują, że również w Twierdzeniu 1 pojawia się ograniczenie na miary zbiorów. Możemy jednak udowodnić słabszą wersję nierówności $(*)$ bez niewygodnego założenia $\gamma_3(A) \leqslant c$.

Twierdzenie 5. *Istnieje stała uniwersalna K taka, że dla dowolnego zbioru wypukłego i rotacyjnie symetrycznego $A \subset \mathbb{C}^n$ oraz cylindra P spełniającego $\nu_n(A) = \nu_n(P)$, mamy*

$$\nu_n((1+K(t-1))A) \geqslant \nu_n(tP), \qquad \text{dla } t \geqslant 1. \tag{3.3}$$

Uwaga 4. Pokażemy to dla $K = 3$. Dowód ze stałą $K = 1$ rozwiązywałby oczywiście Hipotezę 2.

Dowód. Oznaczmy $\ell(t) = 1 + K(t-1)$.

Wystarczy tak naprawdę udowodnić tylko, że nierówność (3.3) zachodzi dla zbiorów o dużej mierze, tzn. $\nu_n(A) \geqslant c$, gdzie c jest stałą z Twierdzenia 1. Rzeczywiście załóżmy, że (3.3) zachodzi dla wszystkich zbiorów wypukłych i rotacyjnie symetrycznych A takich, że $\nu_n(A) \geqslant c$. Pokażemy teraz, że ta nierówność zachodzi także dla zbiorów A o mierze mniejszej niż c. Ustalmy taki zbiór i weźmy $t_0 > 1$ tak, aby $\nu_n(t_0A) = c$. Z Wniosku 1 otrzymujemy

$$\nu_n(tA) \geqslant \nu_n(tP), \qquad t \leqslant t_0,$$

więc tym bardziej (3.3) zachodzi dla $t \leqslant t_0$. Teraz udowodnimy (3.3) dla $t > t_0$. Niech Q będzie cylindrem o tej samej mierze co zbiór t_0A. Stosując założenie mamy

$$\nu_n\left(\ell(t)(t_0A)\right) \geqslant \nu_n(tQ), \qquad t \geqslant 1. \tag{3.4}$$

Zróbmy dwie proste obserwacje

$$\ell(t)t_0 < \ell(t_0 t),$$
$$\nu_n(Q) = \nu_n(t_0 A) \geqslant \nu_n(t_0 P) \Longrightarrow \nu_n(tQ) \geqslant \nu_n(tt_0 P).$$

Wraz z nierównością (3.4) dają one, że

$$\nu_n\left(\ell(tt_0)A\right) \geqslant \nu_n(tt_0 P), \qquad t \geqslant 1,$$

co jest oszacowaniem, które chcieliśmy pokazać.

W dalszym ciągu będziemy więc dowodzić (3.3) w przypadku, gdy $\nu_n(A) \geqslant c$. Ideą dowodu będzie użyć głębokiego rezultatu Latały i Oleszkiewicza dotyczącego dylatacji w przypadku rzeczywistym. Mianowicie, z Twierdzenia 1 pracy [LatOle] mamy

$$\nu_n\left(\ell(t)A\right) \geqslant \nu_n\left(\ell(t)S\right), \qquad t \geqslant 1,$$

gdzie

$$S = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |\mathrm{Re} z_1| \leqslant s\},$$

jest pasem o szerokości $2s$ wybranej tak, aby $\nu_n(A) = \nu_n(S) = 1 - 2T(s)$. Dlatego, zakończymy dowód jeśli udowodnimy, że

$$\nu_n\left(\ell(t)S\right) \geqslant \nu_n(tP), \qquad t \geqslant 1.$$

Tę nierówność można z kolei bardziej rozpisać. Mamy

$$\nu_n\left(\ell(t)S\right) = 1 - 2T\left(\ell(t)s\right),$$

i korzystając ze związku $1 - e^{-p^2/2} = \nu_n(P) = \nu_n(A) = \nu_n(S) = 1 - 2T(s)$ dostajemy $e^{-p^2/2} = 2T(s)$. Tym samym

$$\nu_n(tP) = 1 - e^{-(tp)^2/2} = 1 - \left(2T(s)\right)^{t^2}.$$

Zatem wystarczy udowodnić, że

$$\left(2T(s)\right)^{t^2} \geqslant 2T\left(\ell(t)s\right), \qquad t \geqslant 1, \ s \geqslant s_0, \tag{3.5}$$

gdzie s_0 jest takie, że pas o szerokości $2s_0$ ma miarę c, tzn. $1 - 2T(s_0) = c$. Ponieważ $c > 0.64$, to $T(s_0) < 0.18 < T(0.9)$, więc $s_0 > 0.9$.

Zajmijmy się teraz nierównością (3.5). Dla t bliskich 1 użyjemy nierówności Prékopy-Leindlera [Gar, Twierdzenie 7.1]. Ustalmy w tym celu $s \geqslant s_0$ oraz $t \geqslant 1$ i rozważmy funkcje

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \mathbf{1}_{[\ell(t)s,\infty)}(x),$$
$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x),$$
$$h(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \mathbf{1}_{[s,\infty)}(x).$$

Nietrudno przekonać się, że nierówność

$$f(x)^{1/t^2} g(y)^{1-1/t^2} \leqslant h\left(\frac{1}{t^2}x + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)y\right),$$

zachodzi dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\ell(t)s \geqslant t^2 s$, lub, równoważnie, gdy $t \leqslant K - 1 = 2$. Wtedy, wobec nierówności Prékopy-Leindlera, otrzymujemy

$$(2T(\ell(t)s))^{1/t^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} f\right)^{1/t^2} \left(\int_{\mathbb{R}} g\right)^{1-1/t^2} \leqslant \int_{\mathbb{R}} h = 2T(s).$$

Pozostał nam dowód (3.5) w przypadku $t > 2$ i $s \geqslant s_0$. Poradzimy sobie z tym korzystając z asymptotyki funkcji T. Ze standardowego oszacowania na ogon gaussowski mamy

$$T(\ell(t)s) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\ell(t)s} e^{-\ell(t)^2 s^2/2},$$

podczas gdy z Lematu 2, [LatOle]

$$T(s) > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{s^2+2}} e^{-s^2/2}.$$

Dlatego, aby udowodnić nierówność (3.5) wystarczy udowodnić

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^{t^2} \frac{1}{(s^2+2)^{t^2/2}} e^{-t^2 s^2/2} \geqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\ell(t)s} e^{-\ell(t)^2 s^2/2},$$

co jest równoważne nierówności

$$\exp\left(\frac{s^2}{2}\left(\ell(t)^2 - t^2\right)\right) \geqslant \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{t^2-1} \frac{(s^2+2)^{t^2/2}}{\ell(t)s}, \qquad s \geqslant s_0,\ t \geqslant 2.$$

Biorąc logarytm z obu stron, wstawiając definicję funkcji $\ell(t) = 1 + K(t-1) = 3t - 2$ i upraszczając mamy do pokazania

$$\left(8s^2 - \ln\left(\frac{\pi}{2}\left(s^2+2\right)\right)\right)t^2 - 12s^2 t + 4s^2 + \ln\left(\frac{\pi}{2}s^2\right) + 2\ln(3t-2) \geqslant 0.$$

Oznaczmy lewą stronę przez $F(s,t)$. Zauważmy, że dla $s \geqslant s_0$ i $t \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t}(s,t) &= 2\left(8s^2 - \ln\left(\frac{\pi}{2}\left(s^2+2\right)\right)\right)t - 12s^2 + \frac{6}{3t-2} \\
&> 2\left(5s^2 - \ln\left(\frac{\pi}{2}\left(s^2+2\right)\right)\right)t > 2\left(5s^2 - \frac{\pi}{2e}(s^2+2)\right)t \\
&= 2\left(\left(5 - \frac{\pi}{2e}\right)s^2 - \frac{\pi}{e}\right)t \geqslant 2\left(\left(5 - \frac{\pi}{2e}\right)s_0^2 - \frac{\pi}{e}\right)t \\
&> 2\left(\left(5 - \frac{\pi}{2e}\right)\cdot 0.81 - \frac{\pi}{e}\right)t > 0,
\end{aligned}$$

gdzie w pierwszej nierówności użyliśmy tylko założenia, że $t > 2$ dostając $-12s^2 > -6ts^2$ i zaniedbaliśmy wyraz $\frac{6}{3t-2}$ gdyż jest dodatni, zaś w drugiej nierówności wykorzystaliśmy dobrze znane oszacowanie $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$. Wiedząc zatem, że pochodna jest dodatnia wystarczy sprawdzić, że $F(s,2) > 0$. To można zrobić bezpośrednim rachunkiem

$$\begin{aligned}
F(s,2) &= 4\left(8s^2 - \ln\left(\frac{\pi}{2}\left(s^2+2\right)\right)\right) - 24s^2 + 4s^2 + \ln s^2 + \ln\frac{\pi}{2} + 2\ln 4 \\
&= 4\left(3s^2 - \ln\left(\frac{\pi}{2}\left(s^2+2\right)\right)\right) + \ln\left(8\pi s^2\right) \\
&\underset{\ln x \leqslant x/e}{>} 4\left(\left(3 - \frac{\pi}{2e}\right)s^2 - \frac{\pi}{e}\right) > 0.
\end{aligned}$$

Dowód twierdzenia jest tym samym zakończony. $\square$

Rozdział 4

Lematy pomocnicze

Na początku udowodnimy kilka lematów o raczej technicznym charakterze. Dzięki nim, na koniec rozdziału, będziemy mogli podać dowód Lematu 1.

Lemat 2. *Funkcja F, zdefiniowana w* (2.6)*, jest rosnąca i „na” zbiór* $(0, \infty)$.

Dowód. Aby udowodnić, że F jest rosnąca wystarczy udowodnić, że F jest niemalejąca. Istotnie, gdyby F była stała na pewnym przedziale, byłaby wszędzie stała, bowiem F jest funkcją analityczną.

Oczywiście, F jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $1/F$ jest nierosnąca. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{1}{F(y)} &= \frac{-e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{T(y)\ln T(y)} = \frac{T'(y)}{T(y)\ln T(y)} \\ &= \frac{(-\ln T(y))'}{-\ln T(y)} = (\ln(-\ln T(y)))',\end{aligned}$$

zatem $1/F$ jest nierosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy $y \longmapsto \ln(-\ln T(y))$ jest wklęsła, tzn. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,1)$

$$-\ln T(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant (-\ln T(x))^{\lambda} (-\ln T(y))^{1-\lambda}.$$

Ponieważ $\lim_{x\to-\infty}(-\ln T(x)) = 0$, mamy

$$-\ln T(x) = \int_{-\infty}^{x} (-\ln T(t))' \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}T(t)} \mathrm{d}t,$$

więc żądana nierówność będzie zachodzić na mocy nierówności Prékopy-Leindlera, zobacz [Gar, Twierdzenie 7.1]. Musimy tylko sprawdzić założenia, tzn. sprawdzić czy funkcja $\ln \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}T(t)}$ jest wklęsła. Licząc drugą pochodną nietrudno sprawdzić, że jest ona niedodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned}0 &\leqslant T(t)^2 + \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} t T(t) - \left(\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \\ &= \left(T(t) - \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{t^2+4}-t}{2}\right)\left(T(t) + \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{t^2+4}+t}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

co jest równoważne temu, że

$$T(t) \geqslant \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{t^2+4}-t}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dla $t \geqslant 0$ wynika to ze znanego oszacowania Komatsu (patrz [ItoMcK], strona 17). Dla $t < 0$ mamy $T(t) > 1/2$, więc

$$2T(t)\sqrt{2\pi}e^{t^2/2} + t \geqslant \sqrt{2\pi}(1 + t^2/2) + t > 0,$$

oraz

$$\begin{aligned}
\left(2T(t)\sqrt{2\pi}e^{t^2/2} + t\right)^2 &> \left(\sqrt{2\pi}(1 + t^2/2) + t\right)^2 \\
&= 2\pi\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) t + t^2 \\
&= 2\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}t^2 + \sqrt{2\pi}t + \pi\right) + t^2 \\
&> 2\left(\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}t + 1\right)^2 + \pi - 1\right) + t^2 \\
&> 2(\pi - 1) + t^2 > t^2 + 4.
\end{aligned}$$

To kończy dowód monotoniczności funkcji F.

Zbiorem wartości F jest cała półprosta $(0, \infty)$, gdyż oczywiście

$$F(y) \xrightarrow[y \to -\infty]{} 0,$$

oraz

$$F(y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} \infty,$$

ponieważ na podstawie (3.1), (3.2) mamy

$$\begin{aligned}
F(y) &= -\sqrt{2\pi}e^{y^2/2}T(y)\ln T(y) = \frac{1}{g(y)} \ln\left(\frac{\sqrt{2\pi}e^{y^2/2}}{g(y)}\right) \\
&> \frac{1}{\sqrt{y^2+2}} \ln\left(\sqrt{2\pi}ye^{y^2/2}\right) \xrightarrow[y \to +\infty]{} \infty.
\end{aligned}$$

$\square$

Lemat 3. *Funkcja G, zdefiniowana w (2.7), jest rosnąca na przedziale $[\sqrt{8/\pi}, \infty)$.*

Dowód. Mamy

$$G'(u) = \frac{1 - e^{-u^2/2} - u^2 e^{-u^2/2}}{2\left(1 - e^{-u^2/2}\right)^2},$$

więc $G'(u) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e^{u^2/2} > 1 + u^2$. Tak jest dla $u^2 > 8/\pi$ ponieważ $e^{4/\pi} > 1 + 8/\pi$ oraz funkcja $x \mapsto e^x$ jest wypukła. $\square$

Dowód Lematu 1. *(i)* Korzystając z wypukłości funkcji $-\ln$ dostajemy

$$\begin{aligned} -2\sqrt{2\pi}e^{y^2/2}T(y)\ln\Big(T(y)+\Phi(y)e^{-u^2/2}\Big) &\leqslant 2\sqrt{2\pi}e^{y^2/2}T(y)\Big(-T(y)\ln 1-\Phi(y)\ln e^{-u^2/2}\Big) \\ &= \sqrt{2\pi}e^{y^2/2}T(y)\Phi(y)u^2 \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{8}}u^2 \leqslant u, \end{aligned}$$

przy czym korzystamy z obserwacji, że $\sup_{y\in\mathbb{R}} \sqrt{2\pi}e^{y^2/2}T(y)\Phi(y) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$, patrz [LatOle, Lemat 5].

(ii) Skoro $T(y)+\Phi(y)e^{-u^2/2} = e^{-u^2/2}+(1-e^{-u^2/2})T(y)$, możemy również zastosować wypukłość funkcji $-\ln$ do punktów 1, $T(y)$ z wagami $e^{-u^2/2}$, $1-e^{-u^2/2}$ i otrzymać

$$\begin{aligned} -2\sqrt{2\pi}e^{y^2/2}T(y)\ln\Big(T(y)+\Phi(y)e^{-u^2/2}\Big) &\leqslant -2\sqrt{2\pi}e^{y^2/2}T(y)\ln T(y)(1-e^{-u^2/2}) \\ &= \frac{F(y)}{G(u)}u \leqslant \frac{F(H)}{G\left(\sqrt{8/\pi}\right)}u = u, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej nierówności korzystamy z Lematów 2, 3. $\square$

Bibliografia

[Bor1] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Invent. Math. **30** (1975), 207–216.

[Bor2] C. Borell, *The Ehrhard inequality*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **337** (2003), 663–666.

[Ehr] A. Ehrhard, *Symetrisation dans l'espace de Gauss*, Math. Scand. **53** (1983), 281–301.

[Gar] R. J. Gardner, *The Brunn-Minkowski inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), no. 3, 355–405.

[ItoMcK] K. Itô and H. P. McKean, Jr., *Diffusion processes and their sample paths*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 125 Academic Press, Publishers, New York, 1965.

[KwaSaw] S. Kwapień and J. Sawa, *On some conjecture concerning Gaussian measures of dilatations of convex symmetric sets*, Studia Math. **105** (1993), 173–187.

[LatOle] R. Latała and K. Oleszkiewicz, *Gaussian measures of dilatations of convex symmetric sets*, The Annals of Probability **27** (1999), 1922–1938.

[SudTsi] V.N. Sudakov, B.S. Tsirel'son, *Extremal propertiesof half-spaces for spherically invariant measures* (in Russian), Zap. Nauchn. Sem. L.O.M.I. **41** (1974), 14–24.

[SudZal] V. N. Sudakov and V. A. Zalgaller, *Some problems on centrally symmetric convex bodies*, Problems in global geometry. Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **45** (1974), 75–82 (in Russian).

[Sza] S. Szarek, *Condition numbers of random matrices*, J. Complexity **7** (1991), 131–149.

[Tko] T. Tkocz, *Gaussian measures of dilations of convex rotationally symmetric sets in* $\mathbb{C}^n$, Elect. Comm. in Probab. **16** (2011), 38–49