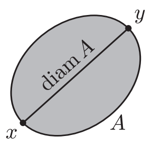
Symetryzacja Steinera

*Tomasz TKOCZ**

Bryłę A nazywamy **wypukłą**, jeśli wraz z każdymi dwoma swoimi punktami zawiera odcinek łączący te punkty.

Rozważmy wypukłą bryłę A w przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$. Jedną z wielkości charakteryzujących to, jak duża jest bryła, może być jej **średnica**, którą oznaczamy przez $\operatorname{diam} A$. Jest to kres górny odległości $|x-y|$ pomiędzy dowolną parą punktów $x, y \in A$. Na przykład, średnica sześcianu $[-1,1]^3$ o wierzchołkach w punktach $(\pm1, \pm1, \pm1)$ wynosi $2\sqrt{3}$, bowiem dwa najbardziej oddalone od siebie punkty to np. wierzchołki $(1,1,1)$ i $(-1,-1,-1)$, które są odległe o

$$|(1,1,1)-(-1,-1,-1)| = \sqrt{(1-(-1))^2+(1-(-1))^2+(1-(-1))^2} = 2\sqrt{3}.$$

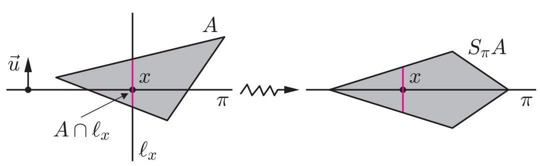


Rys. 1. Średnica zbioru mierzy, jak duży on jest.

Zauważmy też, że zgodnie z tą definicją, średnica kuli o promieniu R to $2R$.

Czy bryła A o ustalonej średnicy d może mieć dowolnie dużą objętość $|A|$? Oczywiście, że nie, bo z definicji średnicy zbioru bryła A musi być zawarta w kuli o promieniu d i środku w dowolnie wybranym punkcie a bryły. Zapytajmy dalej.

Pytanie 1. *Które spośród wszystkich brył wypukłych A o ustalonej średnicy d mają największą objętość i ile ona wynosi?*



Rys. 2. Symetryzacja Steinera względem płaszczyzny π.

Jest to tzw. *problem izodiametryczny*. Można go łatwo rozwiązać przy użyciu silnego geometrycznego narzędzia, jakim jest tytułowa symetryzacja. Dla bryły A jej **symetryzacja Steinera** $S_\pi A$ względem płaszczyzny π to zbiór powstały przez zastąpienie każdego cięcia $A \cap \ell_x$ zbioru A prostą ℓ_x prostopadłą do płaszczyzny π i przechodzącą przez punkt $x \in \pi$ odcinkiem o środku w punkcie x i długości równej długości odcinka $A \cap \ell_x$. Jeśli ktoś lubi znaczki, to zapisujemy to formalnie tak

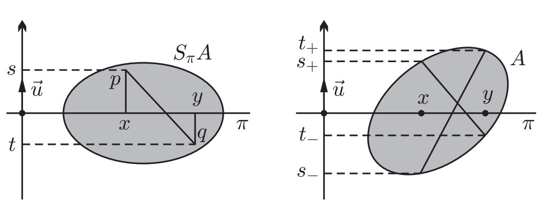
$$S_\pi A = \{x + t\overrightarrow{u} \mid x \in \pi,\ |t| \leqslant t_0(x),\ 2t_0(x) = |A \cap \ell_x|\},$$

gdzie $\overrightarrow{u}$ jest ustalonym jednostkowym wektorem prostopadłym do obranej na samym początku płaszczyzny π.

Nietrudno zobaczyć, że przecięcie zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym, więc przecięcie naszej wypukłej bryły A prostą ℓ_x jest wypukłym podzbiorem tej prostej, czyli odcinkiem.

Intuicyjnie, niezależnie nad każdym punktem x płaszczyzny π tak przesuwamy fragment bryły, żeby był on symetryczny względem płaszczyzny π. Ta operacja ma takie kluczowe własności:

(i) zachowuje wypukłość – jeśli A jest bryłą wypukłą, to $S_\pi A$ też,
(ii) bryła $S_\pi A$ jest symetryczna względem płaszczyzny π,
(iii) nie zmienia objętości bryły – $|S_\pi A| = |A|$,
(iv) nie powiększa średnicy – $\operatorname{diam} S_\pi A \leqslant \operatorname{diam} A$.



Rys. 3. Symetryzacja Steinera nie powiększa średnicy zbioru.

Własność (ii) jest jasna z konstrukcji zbioru $S_\pi A$; (iii) podobnie, bo nalewając wody do A i do $S_\pi A$, nalejemy jej tyle samo, gdyż nad każdym punktem x z π nalejemy jej tyle samo. Dla dowodu własności (iv) ustalmy dwa punkty p, q z $S_\pi A$. Naszym celem jest udowodnić, że $|p-q| \leqslant \operatorname{diam} A$. Niech x i y będą odpowiednio rzutami punktów p i q na π, a s i t – rzutami x i y na prostą $\{\lambda\overrightarrow{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Przy tych oznaczeniach możemy napisać

$$p = x + s\overrightarrow{u}, \qquad q = y + t\overrightarrow{u}.$$

Oznaczmy jeszcze przez s_+, s_- i t_+, t_- odpowiednio końce lewy i prawy odcinków $A \cap \ell_x$ i $A \cap \ell_y$. Mamy wtedy

$$|s| \leqslant \frac{1}{2}|A \cap \ell_x| = \frac{s_+ - s_-}{2}, \qquad |t| \leqslant \frac{1}{2}|A \cap \ell_y| = \frac{t_+ - t_-}{2}.$$

Stąd

$$|s-t| \leqslant |s| + |t| \leqslant \frac{s_+ - s_- + t_+ - t_-}{2},$$

*student Wydziału Fizyki i Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Korzystamy po drodze z nierówności $(\lambda+\mu)^2 \leqslant 2\lambda^2+2\mu^2$, słusznej dla dowolnych liczb rzeczywistych λ i μ.

a więc

$$\begin{aligned}4|p-q|^2 &= 4\left(|x-y|^2+|s-t|^2\right) \leqslant 4|x-y|^2+|s_+-s_-+t_+-t_-|^2\\ &\leqslant 4|x-y|^2+2|s_+-t_-|^2+2|t_+-s_-|^2\\ &= 2|(x+s_+\overrightarrow{u})-(y+t_-\overrightarrow{u})|^2+2|(y+t_+\overrightarrow{u})-(x+s_-\overrightarrow{u})|^2 \leqslant 4\left(\operatorname{diam} A\right)^2.\end{aligned}$$

Dla jeszcze większego oswojenia się z naszym narzędziem dobrym ćwiczeniem, drogi Czytelniku, jest samodzielne udowodnienie własności (i).

Przyszła teraz pora na rozumowanie finałowe, jeśli chodzi o odpowiedź na Pytanie 1. Mając dowolną wypukłą bryłę A o średnicy d, wysymetryzujmy ją kolejno względem każdej z trzech płaszczyzn $\pi_i=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_i=0\}$, $i=1,2,3$, wyznaczonych przez wszystkie możliwe pary osi $0x_1$, $0x_2$, $0x_3$ układu współrzędnych. W ten sposób powstaje bryła $SA=S_{\pi_3}S_{\pi_2}S_{\pi_1}A$, która jako symetryczna względem każdej z płaszczyzn π_i jest środkowo symetryczna względem zera. Zatem dla dowolnego punktu $x\in SA$ jest też $-x\in SA$, więc

$$2|x|=|x-(-x)|\leqslant \operatorname{diam} SA \overset{\text{(iv)}}{\leqslant} \operatorname{diam} A = d,$$

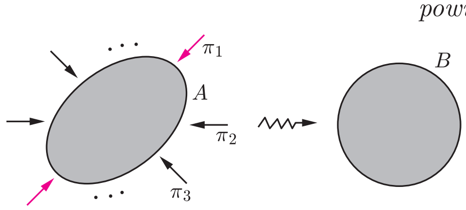
co oznacza, że bryła SA jest zawarta w kuli $B(0,d/2)$ o środku w zerze i promieniu $d/2$. Stąd

$$\text{(D)} \qquad |A| \overset{\text{(iii)}}{=} |SA| \leqslant |B(0,d/2)| = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3.$$

Uzyskaliśmy tym samym (D) – tak zwaną *nierówność izodiametryczną*. Wynika z niej, że wśród ciał o ustalonej średnicy d największą objętość ma kula o promieniu $\frac{1}{2}d$. Jest to odpowiedź na postawione na początku Pytanie 1. Trudne?

Przypomnijmy sobie, że zaczęliśmy od badania średnicy bryły wypukłej. Inną wielkością charakteryzującą to, jak duża może być bryła, jest z pewnością pole powierzchni $|\partial A|$ jej brzegu ∂A. W duchu poprzedniego pytania można się też zastanawiać, czy ma to jakiś związek z objętością bryły, i zadać kolejne pytanie.

Pytanie 2. *Które spośród wszystkich brył wypukłych A o ustalonym polu powierzchni brzegu S mają największą objętość i ile ona wynosi?*



Rys. 4. Twierdzenie o kuli śnieżnej.

Jest to tzw. problem *izoperymetryczny*, wiązany w mitologii rzymskiej z imieniem Dydony, pierwszej królowej Kartaginy. Ścisłego rozwiązania doczekał się on jednak dopiero w XIX w. Nasz bohater, Jakub Steiner, przy użyciu swojej symetryzacji rozwiązał go na płaszczyźnie w 1838 roku. Naszkicujemy teraz jego argument. Na początku kluczowe jest zauważenie kolejnej własności symetryzacji Steinera:

(v) nie powiększa pola powierzchni brzegu – $|\partial S_\pi A|\leqslant|\partial A|$.

Dalej już wystarczy tylko wiedzieć, że startując z dowolnej bryły wypukłej A, można znaleźć taki ciąg płaszczyzn $\pi_1,\pi_2,\ldots$, że symetryzując A kolejno względem nich będziemy w *pewnym* sensie coraz bliżej pewnej kuli B. Nazwa tego twierdzenia doskonale prezentuje jego ideę. Jest to tzw. twierdzenie o *kuli śnieżnej*.

Dla dociekliwych, ściśle to jest tak, że ciąg zbiorów $(S_{\pi_n}S_{\pi_{n-1}}\ldots S_{\pi_1}A)_{n\geqslant 1}$ zbiega w metryce Hausdorffa do pewnej kuli B.

Zatem

$$|\partial B|\leqslant|\partial(S_{\pi_n}S_{\pi_{n-1}}\ldots S_{\pi_1}A)|\leqslant|\partial A|.$$

Ale symetryzacja nie zmienia objętości (pamiętamy o własności (iii)), więc kula B ma taką objętość jak bryła A. Czyli

$$\text{(P)} \qquad 3\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3}|A|^{2/3}=3\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3}|B|^{2/3}=|\partial B|\leqslant|\partial A|.$$

Otrzymaliśmy tym samym klasyczną *nierówność izoperymetryczną*. Znowu widać, że kule są ekstremalne — przy ustalonym polu powierzchni mają największą objętość.

Widzimy, że zupełnie elementarnie byliśmy w stanie odpowiedzieć na dwa wariacyjne pytania. Wszystko dzięki prostej geometrycznej idei symetryzacji. Do kompletności wywodu pozostał dowód twierdzenia o *kuli śnieżnej* i faktu, że symetryzacja nie powiększa pola powierzchni, ale to już temat na inną opowieść.

Rozwiązanie zadania F 785. Oznaczmy przez m masę wody wypieranej przez klocek. Gdy jest on zanurzony pionowo, środek ciężkości zanurzonej części jest na głębokości $l/4$, gdy poziomo, na głębokości $a/4$. A więc położenie środka ciężkości klocka po przewróceniu podniesie się o $(l-a)/4$ i o tyle obniży się środek ciężkości wypartej wody. Zatem energia potencjalna wody w naczyniu spadnie, a energia potencjalna całego klocka nie zmieni się. Wydzielone ciepło będzie więc równe

$$Q=mg(l-a)/4=0,25\,\text{J}.$$