UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Teoría de Modelos de la Exponencial

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

Marcos Mazari Armida

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Timothy Gendron Thornton

2015

1. Datos del alumno.
   Mazari
   Armida
   Marcos
   56 44 20 77
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   308500613
2. Datos del tutor.
   Dr
   Timothy
   Gendron
   Thornton
3. Datos del sinodal 1.
   Dr
   Francisco
   Marmolejo
   Rivas
4. Datos del sinodal 2.
   Dr
   David
   Meza
   Alcántara
5. Datos del sinodal 3.
   Dr
   Enrique Javier
   Elizondo
   Huerta
6. Datos del sinodal 4.
   M. en C.
   Luis Jesús
   Turcio
   Cuevas
7. Datos del trabajo escrito.
   Teoría de Modelos de la Exponencial
   133 p
   2015

Índice general

Agradecimientos

Introducción

Diremos que un número $\tau \in \mathbb{C}$ es trascendente sobre $\mathbb{Q}$ si para todo polinomio $p(x)$ no cero con coeficientes en $\mathbb{Q}$ tenemos que $p(\tau) \neq 0$. Y diremos que es algebraico si no es trascendente[1]. Debido a que tenemos un número numerable de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$, sólo hay un número numerable de números algebraicos, por lo cual tenemos un número no numerable de números trascendentes.

El hecho de que existan muchos no implica que sea fácil demostrar que un número en particular es trascendente. De hecho, no fue sino hasta 1844 que Liouville [20] es capaz de dar ejemplos explícitos de números trascendentes, como por ejemeplo $\Sigma_{n\in\omega}10^{-(n!)}$. La prueba de que e y π son trascendetes no se dio sino hasta 1873 y 1885 respectivamente. Siendo dichos hechos demostrados por Hermite [11] y Lindenmann [19]. Con ello inicia la Teoría de Números Trascendentales [24].

Lindenmann prueba poco después el primer teorema que relaciona la función exponencial con la trascendencia.

Teorema 0.0.1. *Sea $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ entonces al menos uno entre z y $exp(z)$ es trascendente.*

Con ayuda de este teorema se vuelve relativamente fácil probar que ciertos números son trascendentes. Algunos ejemplos serían que $exp(\sqrt{13})$ es trascendente dado que $\sqrt{13}$ es algebraico o que $log(\sqrt{7})$ es trascendente dado que $exp(log(\sqrt{7})) = \sqrt{7}$ es algebraico.

Definición 0.0.1. Dado $Z \subseteq \mathbb{C}$ definimos la trascendencia de Z como:

$$tr(Z) = max\{l | \exists Y \subseteq Z \text{ y } Y = \{y_1, ..., y_l\} \text{ t.q. } \forall p(x_1, ..., x_l) \in \mathbb{Q}[x_1, ..., x_l]\backslash\{0\}, p(y_1, ..., y_l) \neq 0\}.$$

Diremos que $Z \subseteq_{fin} \mathbb{C}$ es algebraicamente independiente si $tr(Z) = |Z|$.

En vista de esta definición, el teorema 0.0.1 nos dice que $tr(z, exp(z)) \geq 1$. Lo que nos gustaría poder hacer es ampliar dicha noción a más de un número, es decir, que para cualesquiera n números (bajo ciertas hipótesis adicionales como independencia lineal sobre $\mathbb{Q}$) tengamos que $tr(z_1, ..., z_n, exp(z_1), ..., exp(z_n)) \geq n$. Justamente en dicho espíritu Lindenmann enuncia y posteriormente Weierstrass demuestra el siguiente teorema [29].

Teorema 0.0.2. *Si $z_1, ..., z_n$ son algebraicos y $\mathbb{Q}-$linealmente independientes entonces $tr(exp(z_1), ..., exp(z_n)) = n$.*

Con este nuevo teorema ya podemos demostrar cosas como que $exp(\sqrt{13})$ y $exp(\sqrt{17})$ son algebraicamente independientes pero aún nos quedan sin probar algunas cosas básicas como sería el hecho de si π y e son o no son algebraicamente independientes.

[1] A partir de ahora y en lo que resta del texto trascendente para nosotros es trascendente sobre $\mathbb{Q}$

No es hasta 1966 que Lang enuncia la Conjetura de Schanuel [24] la cual es justamente la generalización del teorema 0.0.1. y que entre otras cosas nos permitirá demostrar que π y e son algebraicamente independientes.

Conjetura de Schanuel. *Si $z_1, ..., z_n$ son $\mathbb{Q}-$linealmente independientes entonces $tr(exp(z_1), ..., exp(z_n), z_1, ..., z_n) \geq n$*

Primero notemos que en efecto implica que π y e son algebraicamente independientes.

Corolario 0.0.1. *Si la Conjetura de Schanuel es cierta entonces $\{\pi, e\}$ es algebraicamente independiente.*

Demostración. Considere $z_1 = 1$ y $z_2 = \pi i$. Claramente z_1 y z_2 son $\mathbb{Q}-$linealmente independientes entonces por la Conjetura de Schanuel tenemos que al menos dos de $\{1, -1, \pi i, e\}$ son algebraicamente independientes pero dado que 1 y -1 son algebraicos tenemos que πi y e son algebraicamente independientes. Además note que π y (πi) son algebraicamente dependientes. Por lo tanto nos queda que π y e son algebraicamente independientes. $\square$

Lamentablemente la Conjetura de Schanuel aún se encuentra abierta por más esfuerzos que se han hecho en los últimos 50 años de forma número teórica. Por ello, en esta tesis presentaremos un acercamiento a la Conjetura de Schanuel desde un punto de vista nuevo como sería la Teoría de Modelos. Dicho acercamiento se debe a Zilber.[2]

La idea de este trabajo es estudiar la estructura $\mathbb{C}_{exp} = \langle \mathbb{C}, 0, 1, +, *, exp \rangle$ desde la lógica. Lo ideal sería que $Teo(\mathbb{C}_{exp})$[3] fuera *$\kappa-$categórica*, es decir, que cualesquiera dos modelos de cardinalidad κ de $Teo(\mathbb{C}_{exp})$ fueran isomorfos; para que lo único que nos quedara por hacer fuera construir un modelo de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ que cumpliera con la Conjetura de Schanuel.

Lamentablemente al comenzar el estudio $\mathbb{C}_{exp}$ rápidamente nos damos cuenta de que ello será muy complicado de poder demostrar (en caso de que sea cierto) ya que $\langle \mathbb{Z}, +, * \rangle$ es recursivamente definible en $\mathbb{C}_{exp}$ dado que:

$$\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{C} | \forall x((exp(x) = 1) \to (exp(zx) = 1))\}$$

Lo cual implica que $Teo(\mathbb{C}_{exp})$ es muy complicada [3].

La siguiente esperanza es encontrar una teoría en alguna lógica, probablemente tendrá que ser más fuerte que la lógica de primer orden, tal que dicha teoría fuera no numerable categórica, que supiéramos que $\mathbb{C}_{exp}$ la satisface y que le pudiéramos construir un modelo de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ que cumpliera con la Conjetura de Schanuel.

Dicha teoría no ha podido ser encontrada y desde mi punto de vista sería la forma más elegante de probar la Conjetura Schanuel. Además de que le daría mucha fuerza a la Teoría de Modelos. [4]

Dado que esta segunda esperanza está lejos de ser alcanzada, debemos de quitar alguna de las hipótesis y la que sacrificaremos es que $\mathbb{C}_{exp}$ satisfaga, con los resultados que se tienen hoy en día, la teoría; esperando recuperar dicha hipótesis más adelante.

En específico, lo que se realizará en esta tesis es la construcción de una teoría que llamaremos la *teoría de los campos pseudo-exponenciales* tal que dicha teoría tenga un modelo de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ que cumpla con la Conjetura de Schanuel y que sea no numerable categórica. Dicha teoría fue construida originalmente por Zilber en [31].

[2] Casi todo lo que haremos ya ha sido realizado por Zilber [31], Kirby [16] y Bays [8].
[3] Donde $Teo(\mathbb{C}_{exp})$ es el conjunto de enunciados que satisface $\mathbb{C}_{exp}$.
[4] En mis estudios de posgrado me gustaría investigar más esta idea.

Utilizaremos el lenguaje

$$L = \{0,1\} \cup \{+,-,\cdot\} \cup \{E(x,y)\} \cup \{1/m\cdot\}_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \cup \{V_n\}_{n\in\omega}$$

donde $0, 1, +, -, \cdot$ se interpretarán de forma canónica, E es una relación binaria que querremos que se comporte como la función exponencial compleja, $1/m\cdot$ son funciones $1-$arias que se interpretan como multiplicar por $1/m$ y las V_n son las variedades irreducibles sobre $\mathbb{Q}$.

Nuestros primeros axiomas serán los de campo algebraicamente cerrado de característica cero y axiomas que hagan que E se parezca a la exponencial. Específicamente le pediremos a E que sea un homomorfismo suprayectivo del grupo aditivo al grupo multiplicativo y que tenga núcleo estándar, es decir, que su núcleo sea isomorfo a $\mathbb{Z}$.

El primer axioma fuerte que tendremos será la propiedad de Schanuel (ver Sección 2.1). La cual nos dice que dados $x_1, ..., x_n$ tenemos que:

$$tr(x_1, ..., x_n, E(x_1), ..., E(x_n)) - dim(\langle x_1, ..., x_n\rangle_{\mathbb{Q}}) \geq 0.$$

Este axioma, en caso de que nuestro modelo sea $\mathbb{C}_{exp}$ y $x_1, ..., x_n$ sean linealmente independientes, es precisamente la Conjetura de Schanuel. Por lo tanto, si logramos construir un modelo de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ habremos cumplido el primero de nuestros objetivos.

El siguiente axioma es en el único en el cual es necesario utilizar un cuantificador nuevo Q que está más allá de la lógica de primer orden. El axioma afirma que la cerradura exponencial-algebraica Ecl (ver Sección 2.3 para la definición) no aumenta mucho cardinalidades. Específicamente, sea F es un campo que cumple con los axiomas anteriores, si $C \subset_{fin} F$ o C numerable entonces $Ecl(C)$ es a lo más numerable (ver sección 2.3).

El último axioma es aún más técnico. Lo que asegura es que dado X conjunto finito y V una variedad *grande* entonces existe $(a, E(a))$ tal que dicho punto es *genérico* en V sobre el campo generado por X (ver Sección 2.4). Por una variedad *grande* nos referimos a una variedad rotunda, irreducible y libre (ver Sección 2.4 para la definición). A dicho axioma le llamaremos cerradura exponencial-algebraica fuerte. La razón por la cual pedimos que V sea *grande* es porque la propiedad de Schanuel nos dice que ciertas variedades pequeñas no pueden tener dicho tipo de puntos [22].

Después de que construyamos dicha axiomatización, probaremos que la teoría es consistente, es decir, le construiremos un modelo a la teoría iniciando desde cero de forma algebraica (ver capítulo 3). Con ayuda de dicha construcción construiremos un modelo de dimensión infinita (ver apéndice C).

Para cumplir con nuestros objetivos será necesario estudiar a las clases cuasiminimal excelentes (ver Sección 4.2 para la definición). La razón por la cual esta clase de estructuras nos serán sumamente útiles es por un teorema que afirma que si una clase es cuasiminimal excelente (y cumple algunas condiciones técnicas) entonces la clase es no numerable categórica (ver Capítulo 4).

Ya que hayamos estudiado en detalle las clases cuasiminimal excelentes, lo que haremos será demostrar que la clase de los campos pseudo-exponenciales es cuasiminimal excelente y que satisface las hipótesis adicionales del teorema anterior (ver Capítulo 5). Al realizar ello, tendremos que nuestra teoría es no numerable categórica y por ende que tenemos un modelo de cardinalidad del continuo. Además dado que uno de nuestros axiomas es la Conjetura de Schanuel habremos cumplido el segundo objetivo.

Al final, la manera en como recuperaremos la hipótesis que quitamos al principio (que $\mathbb{C}_{exp}$ satisfaga la teoría) es con la siguiente conjetura:

Conjetura de Zilber. *El campo pseudo-exponencial de cardinalidad* $2^{\aleph_0}$ *es isomorfo a* $\mathbb{C}_{exp}$.

Note que como consecuencia directa de ello, $\mathbb{C}_{exp}$ cumple con la Conjetura de Schanuel y es un campo pseudo-exponencial.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Lógicas infinitarias con el cuantificador Q

Dado que la axiomatización que utilizaremos está en la lógica $L_{\omega_1,\omega}(Q)$, daremos un pequeña introducción a la lógica en $L_{\omega_1,\omega}(Q)$ suponiendo una cierta familiaridad del lector con la lógica de primer orden como la que se puede obtener con [10].

La diferencia entre la lógica de primer orden ($L_{\omega,\omega}$) y $L_{\omega_1,\omega}(Q)$ es que en la primera únicamente aceptamos un número finito de conjunciones y disyunciones mientras que en la segunda aceptamos un número numerable de éstas y que en la primera sólo contamos con los cuantificadores universal y existencial mientras que en la segunda contamos además con el cuantificador Q; el cual afirma que hay un número no numerable de elementos que cumplen una determinada fórmula.

Los símblos que tenemos en $L_{\omega_1,\omega}(Q)$ son los símbolos del lenguaje particular L:

$$\mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$$

donde $\mathcal{F}$ es el conjunto de letras funcionales, $\mathcal{R}$ es el conjunto de letras relacionales y $\mathcal{C}$ es el conjunto de constantes. Junto con los símbolos lógicos:

$$\forall, \exists, Q, =, \bigwedge, \wedge, \bigvee \vee, \neg$$

y un conjunto numerable de variables $Var = \{x_i\}_{i\in\omega}$.

Definición 1.1.1. Dado un lenguaje L, los **términos** en $L_{\omega_1,\omega}$, denotados por $Term_{L_{\omega_1,\omega}}$, es el menor conjunto tal que:

- Si $c \in \mathcal{C}$ entonces $c \in Term_{L_{\omega_1,\omega}}$.
- Si $x_i \in Var$ entonces $x_i \in Term_{L_{\omega_1,\omega}}$.
- Si $\{\tau_1, ..., \tau_n\} \subseteq Term_{L_{\omega_1,\omega}}$ y $f \in \mathcal{F}$ tal que f es de aridad n, entonces $f(\tau_1, ..., \tau_n) \in Term_{L_{\omega_1,\omega}}$.

Con ello en mente estamos en posición de definir lo que es una fómula pero antes definamos lo que entendemos por una fórmula atómica.

Definición 1.1.2. Dado L un lenguaje, ϕ es una fórmula atómica si:

- $\phi = (\tau_1 = \tau_2)$ para τ_1 y τ_2 términos.
- $\phi = (R(\tau_1, ..., \tau_n))$ para $\{\tau_1, ..., \tau_n\} \subseteq Term_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$ y $R \in \mathcal{R}$ tal que R es de aridad n.

Definición 1.1.3. Dado L un lenguaje, las **fórmulas** en $L_{\omega_1,\omega}$(Q), denotadas por $Form_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$, son el menor conjunto tal que:

- Si ϕ es fórmula atómica entonces $\phi \in Form_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$.
- Si $\phi \in Form_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$ entonces $\neg(\phi) \in Form_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$.
- Si $\phi, \psi \in Form_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$ entonces $(\phi \wedge \psi) \in Form_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$ y $(\phi \vee \psi) \in Form_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$
- Si $\Psi = \{\psi_n\}_{n\in\omega} \subseteq Form_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$ y en Ψ ocurren un número finito de variables libres, una variable es libre si no está al alcance de un cuantificador, entonces $(\bigwedge_{n=1}^{\infty} \psi_n) \in Form_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$ y $(\bigvee_{n=1}^{\infty} \psi_n) \in Form_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$.
- Si $\phi \in Form_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$ entonces $\forall x(\phi), \exists x(\phi), Qx(\phi) \in Form_{L_{\omega_1,\omega}(Q)}$.

Note que estamos diferenciando entre conjunciones/disyunciones finitas e infinitas, la razón por la cual hacemos ello es porque más tarde introduciremos conjuntos que sólo son cerrados bajo las conjunciones y disyunciones finitas. Antes de pasar a la parte semántica es preciso introducir dos últimas nociones sintácticas.

Definición 1.1.4. Diremos que una fórmula ϕ es **libre de cuantificadores** si en ella no ocurre ningún cuantificador, es decir, no ocurre $\forall$ ni $\exists$ ni Q.

Definición 1.1.5. Diremos que una fórmula ϕ es un **enunciado** si todas sus variables están acotadas. Donde una variable está acotada si se encuentra al alcance de un cuantificador.

Es momento de pasar a algunas definiciones semánticas.

Definición 1.1.6. Un $L-$**modelo** o $L-$estructura es una pareja, $\mathfrak{A} = \langle A, I\rangle$ donde A es el universo de interpretación ($A \neq \varnothing$) e I es la función de interpretación, la cual cumple:

- Si $c \in \mathcal{C}$ entonces $I(c) = c^{\mathfrak{A}} \in A$.
- Si $f \in \mathcal{F}$ es una letra funcional de aridad n entonces $I(f) = f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ es una función de aridad n.
- Si $R \in \mathcal{R}$ es una letra relacional de ariadad n entonces $I(R) = R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ es un subconjunto de A^n.

De la manera usual, una asignación es una función de las variables al universo de $\mathfrak{A}$ ($s : Var \to A$).

Definición 1.1.7. Dados L un lenguaje, $\mathfrak{A}$ una $L-$estructura y s una asignación, definimos la **interpretación de un término**, denotada por $\tau^{\mathfrak{A}}[s]$, de la siguiente manera:

1. Si $c \in \mathcal{C}$ entonces $c^{\mathfrak{A}}[s] = I(c)$.
2. Si $x \in Var$ entonces $x^{\mathfrak{A}}[s] = s(x)$.

3. Si $\{\tau_1, ..., \tau_n\} \subseteq Term_{L_{\omega_1,\omega}}$ y $f \in \mathcal{F}$ de aridad n entonces $(f(\tau_1, ..., \tau_n))^{\mathfrak{A}}[s] = f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[s], ..., \tau_n^{\mathfrak{A}}[s])$.

Ahora sí, con todo ello podemos definir la noción de satisfacibilidad para nuestra nueva lógica.

Definición 1.1.8. Dados un modelo $\mathfrak{A}$ y s una asignación de $\mathfrak{A}$ decimos que $\mathfrak{A}$ **satisface** ϕ **en** s (denotado por $\mathfrak{A} \vDash \phi[s]$) si:

- Si ϕ es atómica:
  - Si $\phi = (\tau_1 = \tau_2)$ entonces $\mathfrak{A} \vDash (\tau_1 = \tau_2)[s]$ si $\tau_1^{\mathfrak{A}}[s] = \tau_2^{\mathfrak{A}}[s]$.
  - Si $\phi = R(\tau_1, ..., \tau_n)$ entonces $\mathfrak{A} \vDash R(\tau_1, ..., \tau_n)[s]$ si $(\tau_1^{\mathfrak{A}}[s], ..., \tau_n^{\mathfrak{A}}[s]) \in R^{\mathfrak{A}}$
- Si ϕ es $\neg\delta$ entonces $\mathfrak{A} \vDash \phi[s]$ si $\mathfrak{A} \nvDash \delta[s]$.
- Si ϕ es $(\alpha \wedge \psi)$ entonces $\mathfrak{A} \vDash (\alpha \wedge \psi)[s]$ si $\mathfrak{A} \vDash \alpha[s]$ y $\mathfrak{A} \vDash \psi[s]$.
- Si ϕ es $(\alpha \vee \psi)$ entonces $\mathfrak{A} \vDash (\alpha \vee \psi)[s]$ si $\mathfrak{A} \vDash \alpha[s]$ o $\mathfrak{A} \vDash \psi[s]$.
- Si ϕ es $\bigvee_{i=1}^{\infty} \psi_i$ entonces $\mathfrak{A} \vDash \phi[s]$ si para alguna $i \in \omega$ $\mathfrak{A} \vDash \psi_i[s]$.
- Si ϕ es $\bigwedge_{i=1}^{\infty} \psi_i$ entonces $\mathfrak{A} \vDash \phi[s]$ si para toda $i \in \omega$ $\mathfrak{A} \vDash \psi_i[s]$.
- Si ϕ es $\exists x\delta(x)$ entonces $\mathfrak{A} \vDash \varphi[s]$ si hay un $b \in A$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \delta[s(x/b)]$[1].
- Si ϕ es $\forall x\delta(x)$ entonces $\mathfrak{A} \vDash \phi[s]$ si para toda $b \in A$ $\mathfrak{A} \vDash \delta[s(x/b)]$.
- Si ϕ es $Qx\delta(x)$ entonces $\mathfrak{A} \vDash \phi[s]$ si $|\ \{b \in A | \mathfrak{A} \vDash \delta[s(x/b)]\}\ | \geq \aleph_1$

De la manera usual decimos que $\mathfrak{A}$ es **modelo** de ϕ si para toda asignación de $\mathfrak{A}$ se tiene que $\mathfrak{A} \vDash \phi[s]$ (lo denotaremos por $\mathfrak{A} \vDash \varphi$) y decimos que un conjunto de fórmulas Σ es **satisfacible** si existen $\mathfrak{A}$ y s una asignación tales que $\mathfrak{A} \vDash \sigma[s]$ para todo $\sigma \in \Sigma$.

En algunos casos en vez de utilizar s daremos de manera explícita la parte de la asignación que nos interesa, es decir, la parte de las variables libres de la fórmula. También es pertinente notar que la asiganción es irrelevante en el caso que ϕ sea un enunciado pues no tiene variables libres.

Las definiciones parecen ser similares a las clásicas pero como veremos a continuación nuestras lógicas tienen algunas diferencias. Mientras que la lógica de primer orden satisface el teorema de compacidad, el cual afirma que un conjunto de enunciados Σ es finitamente satisfacible si y sólo si es satisfacible, nuestra nueva lógica no lo satisfacerá. Además de ello, nuestra nueva lógica no satsifacerá el teorema de Löwenheim-Skolem, el cual afirma que para todo Σ conjunto de enunciados, si Σ tiene un modelo infinito entonces tiene un modelo para todo cardinal mayor o igual a $|L| + \aleph_0$, mientras que la lógica de primer orden sí lo satisface.

Lema 1.1.1. *La lógica $L_{\omega_1,\omega}(Q)$ no satisface el Teorema de Compacidad.*

Demostración. Considere $L = \{c_i | i \in \omega\} \cup \{d\}$ y sea $\Sigma = \{c_i \neq d \mid i \in \omega\} \cup \{\forall x \bigvee_{i=1}^{\infty} x = c_i\}$.

Sea $\Delta \subseteq_{fin} \Sigma$ y sea c_m la constante con índice más alto que ocurre en Δ (en caso de que ocurra $\forall x \bigvee_{i=1}^{\infty} x = c_i$ sin contar las que ocurren en ésta). Considere $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, I \rangle$ donde $I(c_i) = i$, $I(d) = m+1$ y s la constante cero. Claramente $\mathfrak{A} \vDash \Delta[s]$. Por lo tanto, Σ es finitamente satisfacible.

Ahora bien, para ver que no es satisfacible procedamos por contradicción. Supongamos que sí lo es, sea $\mathfrak{B}$ un modelo y sea s una asiganción tal que $\mathfrak{B} \vDash \Sigma[s]$. Dado que $\mathfrak{B} \vDash \{c_i \neq d \mid i \in \omega\}[s]$ entonces $d^{\mathfrak{B}} \neq c_i^{\mathfrak{B}}$ para toda $i \in \omega$. Pero como $\forall x \bigvee_{i=1}^{\infty} x = c_i \in \Sigma$ entonces $d^{\mathfrak{B}} = c_i^{\mathfrak{B}}$ para alguna $i \in \omega$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, Σ no es satisfacible. $\square$

[1] $s(x/b)$ es la asignación que se obtiene de s al sustiuir el valor asignado a x por b.

Lema 1.1.2. *La lógica $L_{\omega_1,\omega}(Q)$ no satisface Löwenheim-Skolem.*

Demostración. Considere $L = \{c_i | i \in \omega\}$ y $\Sigma = \{\forall x \bigvee_{i=1}^{\infty} x = c_i\}$. Notemos que $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, I\rangle$ donde $I(c_i) = i$ es modelo de Σ y es infinito. Ahora bien, claramente cualquier otro modelo de Σ será numerable, dado que cualquier elemento del modelo tendrá que ser igual a $c_i^{\mathfrak{B}}$ para alguna $i \in \omega$.

□

Era necesario introducir el cuantificador Q dado que aparece en nuestra axiomatización pero afortunadamente únicamente aparecerá en el axioma cuatro (ver sección 2.3). De hecho, en toda la parte de clases cuasiminimal excelentes (ver capítulo 4), que es la parte teórica de la tesis, los resultados no van a ser en axiomatizaciones en $L_{\omega_1,\omega}(Q)$ en general sino que se dan en axiomatizaciones en $L_{\omega_1,\omega}$ más cerradura numerable, que es justo el axioma de nuestra teoría particular que se escribe con el cuantificador Q.[2] Por lo tanto, la lógica que realmente debemos de entender es $L_{\omega_1,\omega}$ y a partir de ahora todo lo que hagamos será en ésta salvo que se especifique lo contrario.

1.2. Teoría de Modelos en $L_{\omega_1,\omega}$

En esta sección daremos una lista de definiciones que nos serán útiles a lo largo de todo el texto y con las cuales el lector debe estar familiarizado. Terminaremos con el teorema de Scott, el cual es un resultado angular en la teoría de modelos en lógicas infinitarias. Lo primero que debemos de saber es cómo se relacionan un par de modelos y es justo ello lo primero que definiremos. Todo lo presentado en esta sección se encuentra con más detalle en [23] y [21].

1.2.1. General

Definición 1.2.1. Dadas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ L-estructuras. Diremos que f es un **homormorfismo** de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ si $f : A \to B$ es una función tal que:

1. Si c es una constante entonces $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.
2. Si h es una fúnción $n-$aria y $a_1, ..., a_n \in A$ entonces $f(h^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) = h^{\mathfrak{B}}(f(\bar{a}))$.
3. Si r es una relación $n-$aria y $a_1, ..., a_n \in A$ entonces $\langle \bar{a}\rangle \in r^{\mathfrak{A}}$ sii $\langle f(\bar{a})\rangle \in r^{\mathfrak{B}}$.

Diremos que f es **monomorfismo** si f es homomorfismo y es inyectiva como función. Si además es suprayectiva diremos que es **isomorfismo** y lo denotaremos por $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Lema 1.2.1. *Si f es un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ entonces tenemos que:*

1. *Si f es monomorfismo entonces preserva todas las fórmulas libres de cuantificadores en $L_{\omega_1,\omega}$, es decir, dada $\{a_i\}_{i\in n}$ en A y dada ϕ libre de cuantificadores:*

$$\mathfrak{A} \vDash \phi[\{a_i\}_{i\in n}] \text{ sii } \mathfrak{B} \vDash \phi[\{f(a_i)\}_{i\in n}]$$

2. *Si f es isomorfismo entonces preserva todas las fórmulas en $L_{\omega_1,\omega}$, es decir, dada $\{a_i\}_{i\in n}$ en A y dada ϕ fórmula:*

[2] Cabe mencionar que resultados generales para clases cuasiminimal excelentes axiomatizadas en $L_{\omega_1,\omega}(Q)$ aún se encuentran abiertos.

$$\mathfrak{A} \models \phi[\{a_i\}_{i\in n}] \textit{ sii } \mathfrak{B} \models \phi[\{f(a_i)\}_{i\in n}]$$

Demostración. La prueba se hace por inducción sobre la formación de fórmulas y es análoga a la que se hace en primer orden, para el caso de primer orden consulte [10]. □

Tenemos un cierto regreso al lema anterior y justamente ello nos enuncia el siguiente lema.

Lema 1.2.2. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $L-$estructuras y h una función de A a B tal que preserva todas las fórmulas libres de cuantificadores (es suficiente con que preserve las atómicas) entonces h es un monomorfismo.*

Demostración. Para ver que la función es inyectiva utilizamos la fórmula $x = y$, para ver que preserva constantes utilizamos la fórmula $c = y$, para ver que preserva funciones utilizamos $(f(x_1, ..., x_n) = y)$ y para ver que preserva las relaciones utilizamos $R(x_1, ..., x_n)$. □

En el espíritu de dicho teorema se tiene la definición de monomorfismo parcial.

Definición 1.2.2. Diremos que f es **monomorfismo parcial** si $f : A_0 \subseteq A \to B$ y para toda ϕ fórmula libre de cuantificadores y $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq A_0$ se satisface que

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, ..., a_n] \text{ sii } \mathfrak{B} \models \phi[f(a_1), ..., f(a_n)]$$

Como sabemos, el que dos estructuras sean isomorfas nos dice que ambas estructuras son indistinguibles entre si pero al estar estudiándolas desde la lógica nos será suficiente que sean indistinguibles una de la otra a los ojos de la lógica; justamente ello es lo que encapsula la siguiente definición.

Definición 1.2.3. Decimos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $L_{\omega_1,\omega}-$**elementalmente equivalentes** si para todo ϕ enunciado en $L_{\omega_1,\omega}$ tenemos que:

$$\mathfrak{A} \models \phi \text{ sii } \mathfrak{B} \models \phi.$$

Lo denotaremos por $\mathfrak{A} \equiv_{\omega_1,\omega} \mathfrak{B}$

La siguiente proposición relaciona ambas nociones.

Proposición 1.2.1. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ estructuras. Si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{A} \equiv_{\omega_1,\omega} \mathfrak{B}$.*

Demostración. Por el lema 1.2.1 si dos estructuras son isomorfas preservan todas las fórmulas y por ende en particular los enunciados. □

Otra noción que nos permite comparar modelos es la siguiente.

Definición 1.2.4. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $L-$estructuras. Un **sistema de monomorfismos parciales** entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ es un subconjunto no vacío K de monomorfismos parciales tales que:

1. Si $f \in K$ y $a \in A$ entonces existe un $g \in K$ tal que $g \supseteq f$, por ello nos referimos a una función tal que $g \restriction_{dom(f)} = f$, y $a \in dom(g)$ (forth).

2. Si $g \in K$ y $b \in B$ entonces existe un $f \in K$ tal que $f \supseteq g$ y $b \in im(f)$ (back).

En caso de que exista tal K diremos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son **back-and-forth** equivalentes y lo denotaremos por $\mathfrak{A} \approx_K \mathfrak{B}$.

El siguiente lema nos relaciona las últimas dos nociones.

Lema 1.2.3. *Dadas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $L-$estructuras. Entonces tenemos que:*

1. *Si $\mathfrak{A} \approx_K \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{A} \equiv_{\omega_1,\omega} \mathfrak{B}$.*
2. *Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son numerables y $\mathfrak{A} \equiv_{\omega_1,\omega} \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{A} \approx_K \mathfrak{B}$.*

Demostración. 1. Primero demostraremos que para todo $f \in K$ y $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq dom(f)$ y $\phi \in Form_{L_{\omega_1,\omega}}$ con $n-$variables libres tenemos que:

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, ..., a_n] \text{ sii } \mathfrak{B} \models \phi[f(a_1), ..., f(a_n)]$$

La prueba la haremos por inducción sobre la formación de fórmulas.

Si ϕ es atómica. Como $f \in K$ es monomorfismo parcial y las fórmulas atómicas son libres de cuantificadores por definición se tiene el resultado.

Los casos $\phi = \bigwedge_{i\in\omega} \psi_i$, $\phi = \bigvee_{i\in\omega} \psi_i$ y $\phi = \neg\psi$ son triviales por inducción.

Ahora bien, supongamos que $\phi = \exists x(\psi(x, y_1, ..., y_n))$. Sea $f \in K$, $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq dom(f)$ y supongamos que $\mathfrak{A} \models \exists x(\psi(x, a_1, ..., a_n))$. Por definición de satisfacibilidad hay un $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[a, a_1, ..., a_n]$. Dado que $f \in K$ por el punto 1 de la defінción hay un $g \in K$ tal que $f \subseteq g$ y $a \in dom(g)$. Por ende por hipótesis de inducción $\mathfrak{B} \models \psi[g(a), g(a_1), ..., g(a_n)]$. Como $f \subseteq g$ y por la definición de satisfacibiliad del existencial tenemos que $\mathfrak{B} \models \exists x(\psi(x, f(a_1), ..., f(a_n)))$. De manera análoga pero ahora utilizando la parte 2 de la definición 1.2.4 tenemos la vuelta. De donde tenemos que:

$$\mathfrak{A} \models \exists x(\psi(x, a_1, ..., a_n)) \text{ sii } \mathfrak{B} \models \exists x(\psi(x, f(a_1), ..., f(a_n))$$

Por lo tanto, como se preservan todas la fórmulas en particular se preservan todos lo enunciados, es decir, $\mathfrak{A} \equiv_{\omega_1,\omega} \mathfrak{B}$.

2. Definamos

$$K = \{f | f \text{ es una función con dominio finito tal que preserva todas las fórmulas en } L_{\omega_1,\omega} \text{ con a lo más } |dom(f)| \text{ variables libres } \}.$$

Note que $K \neq \emptyset$ dado que $\emptyset \in K$ ya que por hipótesis se preservan los enunciados.

Lo que tenemos que demostrar es que dado $f \in K$ podemos extenderlo. La prueba de dicho hecho lo haremos en dos casos:

a) **Caso 1:** Sea $f = \emptyset$. Para el caso forth, sea $a \in A$, note que es suficiente encontrar una $b \in B$ tal que para toda $\phi \in L_{\omega_1,\omega}$ con 1 variable libre tengamos que:

$$\mathfrak{A} \models \phi[a] \text{ sii } \mathfrak{B} \models \phi[b]$$

Procedamos por contradicción. Supongamos que no existe dicha b, entonces para toda $b \in B$ existe una ϕ_b tal que $\mathfrak{A} \models \phi_b[a]$ y $\mathfrak{A} \not\models \phi_b[b]$. Considere $\psi = \exists x \bigwedge_{b\in B} \phi_b(x)$, como B es numerable y toda φ_b tiene una variable libre, ψ es un enunciado en $L_{\omega_1,\omega}$. Ahora bien como $a \in A$ tenemos que $\mathfrak{A} \models \exists x \bigwedge_{b\in B} \phi_b(x)$ y por construcción $\mathfrak{B} \not\models \exists x \bigwedge_{b\in B} \varphi_b(x)$. Por otro lado, como $\mathfrak{A} \equiv_{\omega_1,\omega} \mathfrak{B}$ tenemos que $\mathfrak{B} \models \exists x \bigwedge_{b\in B} \varphi_b$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, existe un $b \in B$ que preserva las fórmulas con una variable libre de donde $g = \{(a, b)\} \in K$. El caso back es análogo.

b) **Caso 2:** Sea $f \in K$ tal que $f \neq \emptyset$. La prueba es análoga a la anterior sólo que ahora en vez de usar el hecho de que $\mathfrak{A} \equiv_{\omega_1,\omega} \mathfrak{B}$ utilizamos el hecho de que por construcción f preserva las fórmulas con $|dom(f)|$ variables libres.

Por lo tanto, $\mathfrak{A} \approx_K \mathfrak{B}$.

$\square$

Lema 1.2.4. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $L-$estructuras numerables. Si $\mathfrak{A} \approx_K \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Demostración. La construcción del isomorfismo se hace por el método de back-and-forth, método que será utilizado regularmente en el texto. Sea $\{a_n\}_{n\in\omega}$ y $\{b_n\}_{n\in\omega}$ dos enumeraciones de A y B respectivamente. Sea f un elemento arbitario de K, el cual existe pues $K \neq \emptyset$. Construyamos monomorfismos parciales f_n, $f_n : A \to A$, tales que

1. $f_n \in K$
2. $f_n \subseteq f_{n+1}$
3. $f \subseteq f_n$
4. Si $n = 2k+1$ entonces $\{a_n\}_{n\leq k} \subseteq dom(f_n)$ y si $n = 2(k+1)$ entonces $\{b_n\}_{n\leq k} \subseteq im(f_n)$.

La construcción la haremos por recursión.

- Si $n = 0$, sea $f_0 = f$.
- Si n es impar. Sea
$$a = min\{c \in A | c \notin dom(f_{n-1})\}$$
donde el mínimo es respecto a la enumeración $\{a_n\}_{n\in\omega}$. Como $a \in A$ y por construcción $f_{n-1} \in K$ hay un $g \in K$ tal que $f \subseteq g$ y $a \in dom(g)$. Sea $f_n := g$ y claramente f_n cumple lo deseado.
- Si n es par. Sea
$$b = min\{c \in B | c \notin im(f_{n-1})\}$$
donde el mínimo es respecto a la enumeración $\{b_n\}_{n\in\omega}$. Como $b \in B$ y por construcción $f_{n-1} \in K$ hay un $g \in K$ tal que $f \subseteq g$ y $b \in im(g)$. Sea $f_n := g$ y claramente cumple lo deseado.

Definamos a $h = \bigcup_{n\in\omega} f_n$. Como $f_n \subseteq f_{n+1}$ y para cada $n \in \omega$, f_n es monomorfismo parcial, tenemos que h es monomorfismo parcial. Pero por lo pasos impares tenemos que h cubre A, por lo que es monomorfismo, y dado que por los pasos pares cubre B, h es isomorfismo. Por lo tanto, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. $\square$

Un corolario de estos últimos dos lemas es que como la lógica de primer orden caracteriza las estructuras finitas, $L_{\omega_1,\omega}$ caracteriza a las estructuras numerables.

Corolario 1.2.1. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $L-$estructuras numerables. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ sii $\mathfrak{A} \equiv_{L_{\omega_1,\omega}} \mathfrak{B}$*

Demostración. La ida es la proposición 1.2.1 y la vuelta se sigue directo del lema 1.2.3 y 1.2.4. $\square$

Antes de enfocarnos en el teorma de Scott definiremos algunas otras nociones que nos serán importantes en el capítulo 4. Dada $\mathfrak{A}$ una $L-$estructura y $C \subseteq A$ definimos L_C como el lenguaje que se obtiene al agregrar una constante distinta para cada elemente de C. Es claro que podemos hacer a $\mathfrak{A}$ una L_C-estructura al interpretar las constates de forma canónica.

Definición 1.2.5. Dada $\mathfrak{A}$ una $L-$estructura, $\bar{a} \in A^n$ y $C \subseteq A$ definimos el **tipo libre de cuantificadores** de $\bar{a}$ sobre C como:

$$tp^L_{qf_{\mathfrak{A}}}(\bar{a}/C) = \{\phi \in Form_{L_{\omega_1,\omega,C}} | \phi \text{ libre de cuantificadores con } n \text{ variables libres y } \mathfrak{A} \vDash \phi[\bar{a}]\}.$$

Análogamente, definimos el **tipo** de $\bar{a}$ sobre C como:

$$tp^L_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/C) = \{\phi \in FormL_{\omega_1,\omega,C} | \phi \text{ tiene } n \text{ variables libres y } \mathfrak{A} \vDash \phi[\bar{a}]\}.$$

En caso de que no haya ambigüedad respecto al lenguaje L, no se escribirá el supraíndece.

Un hecho trivial que se sigue de ello es lo siguiente.

Lema 1.2.5. *Sea $\mathfrak{A}$ una L-estructura, $C \subseteq A$ y $a, b \in A$ tales que $tp_{qf_{\mathfrak{A}}}(a/C) = tp_{qf_{\mathfrak{A}}}(b/C)$ entonces $f : \{a\} \cup C \to \{b\} \cup C$ tal que $f(a) = b$ y $f \restriction_C = I_C$ es un monomorfismo parcial.*

Demostración. Se sigue de las definiciones. □

En vistas a poder comparar tipos de elementos en distintas estructuras tenemos el siguiente concepto. Dado $g : C \subseteq A \to A'$ monomorfismo parcial entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$ y $\bar{a} \in A^n$, definimos

$$g^* tp_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/C) = \{\phi(\bar{v}; g(\bar{c})) \in Form_{L_{\omega_1,\omega,g(C)}} | \phi(\bar{v}; \bar{c}) \in tp_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/C)\}.$$

Definición 1.2.6. Dados $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ modelos, $\bar{a} \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$, $X \subseteq A$ y sea K un conjunto no vacío de monomorfismos parciales tales que:

- Para todo $f \in K$ se tiene que $f(\bar{a}) = \bar{b}$.
- Para todo $f, g \in K$ se tiene que $f \restriction_X = g \restriction_X$
- Para todo $f \in K$ y $a \in A$ existe un $g \supseteq f$ tal que $g \in K$ y $a \in dom(g)$.
- Para todo $g \in K$ y $b \in B$ existe un $f \supseteq g$ tal que $f \in K$ y $b \in Im(f)$.

En caso de que exista tal K diremos que $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ y $(\mathfrak{B}, \bar{b})$ son **back-and-forth equivalentes sobre** X.

Proposición 1.2.2. *Dados $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ modelos, $\bar{a} \in A^n$ y $\bar{b} \in B^n$. Si $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ y $(\mathfrak{B}, \bar{b})$ son back-and-forth equivalentes sobre X entonces*

$$f^* tp_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/X) = tp_{\mathfrak{B}}(f(\bar{a})/f(X)),$$

donde f es un elemento arbitrario de K.

Demostración. La prueba es análoga a lema 1.2.3. □

Definición 1.2.7. Decimos que $\mathfrak{A}$ es **subestructura** de $\mathfrak{B}$ (denotado por $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$) si la inclusión es monomorfismo y decimos que es **subestructura elemental** (denotado por $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$) si para todo $\{a_i\}_{i\in n} \subseteq A$ y ϕ fórmula tenemos que:

$$\mathfrak{A} \vDash \phi[\{a_i\}_{i\in n}] \text{ sii } \mathfrak{B} \vDash \phi[\{a_i\}_{i\in n}]$$

Definición 1.2.8. Sea $\langle I, < \rangle$ un orden lineal. Supongamos que para cada $i \in I$, $\mathfrak{A}_i$ es una $L-$estructura. Decimos que $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ es una **cadena** si para todo $i < j$ tenemos que $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j$. $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ es cadena elemental si para todo $i < j$ tenemos que $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_j$.

Proposición 1.2.3. *Sea $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ una cadena elemental entonces dada $\mathfrak{A}_i$ tenemos que $\mathfrak{A} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ es tal que $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}$.*

Demostración. Primero definimos a $\mathfrak{A}$ en la forma usual, es decir, el dominio de $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ y la interpretación es la siguiente:

1. Si $c \in C$ entonces $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}_i}$ para alguna $i \in I$.

2. Si f es una función $n-$aria y $a_1, ..., a_n \in A$. Definamos a $f^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = f^{\mathfrak{A}_j}(\bar{a})$ donde j es el mínimo $i \in I$ tal que $\bar{a} \in A_i$.

3. Si R es una función $n-$aria y $a_1, ..., a_n \in A$. Diremos $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}}$ sii $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}_j}$ donde j es el mínimo $i \in I$ tal que $\bar{a} \in A_i$.

Por el hecho de que son subestructuras todo se encuentra bien definido. La prueba de que $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}$ la haremos por inducción sobre la formación de fórmulas.

La prueba para ϕ atómica es sencilla haciendo primero inducción sobre formación de términos para ver que $\tau^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = \tau^{\mathfrak{A}_j}[\bar{a}]$ donde j es el mínimo $i \in I$ tal que $\bar{a} \in A_i$. El caso $\phi = \neg\psi$ y $\phi := \bigvee_{i\in\omega} \psi_i$ se siguen de la hipótesis de inducción.

Por lo que únicamente haremos el caso de $\phi = \exists x\psi(x, \bar{w})$. Sea $\bar{a} \in A_i$. Si $\mathfrak{A}_i \vDash \exists x\psi(x, \bar{a})$ por la definición de satisfacibilidad hay $b \in A_i$ tal que $\mathfrak{A}_i \vDash \psi[b, \bar{a}]$ y por hipótesis de inducción $\mathfrak{A} \vDash \psi[b, \bar{a}]$. De donde concluimos que $\mathfrak{A} \vDash \exists x\psi(x, \bar{a})$.

Ahora bien, si $\mathfrak{A} \vDash \exists x\psi(x, \bar{a})$ entonces hay un $b \in A$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \psi[b, \bar{a}]$. Como $b \in A$ hay un $j \in I$ tal que $b \in A_j$ y supongamos sin pérdidade generalidad que $j > i$ por lo que por hipótesis de inducción $\mathfrak{A}_j \vDash \psi[b, \bar{a}]$. De donde $\mathfrak{A}_j \vDash \exists x\psi(x, \bar{a})$ y como por hipótesis $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_j$ llegamos a que $\mathfrak{A}_i \vDash \exists x\psi(x, \bar{a})$.

Por lo tanto para todo $i \in I$ tenemos que $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}$. □

1.2.2. Teorema de Scott

La idea de esta sección como su nombre lo dice es probar el teorema de Scott, el cual afirma lo siguiente:

Teorema de Scott. *Sea L un lenguaje numerable. Dada $\mathfrak{A}$ L-estructura numerable existe un $\varphi^{\mathfrak{A}}$ enunciado en $L_{\omega_1,\omega}$ tal que para cualquier $\mathfrak{B}$ L-estructura numerable tenemos que $\mathfrak{B} \vDash \varphi^{\mathfrak{A}}$ sii $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.*

Dado que el teorema de Scott supone que L es numerable en toda esta sección trabajaremos con dicha hipótesis. Lo primero que haremos será definir la siguiente relación de equivalencia.

Definición 1.2.9. Dadas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $L-$estructuras. Dada $\bar{a} \in A^n$ y $\bar{b} \in B^n$ y n corriendo en los naturales definimos la siguiente relación sobre los ordinales:

1. Si $\alpha = 0$. $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \sim_0 (\mathfrak{B}, \bar{b})$ si para toda φ fórmula atómica $\mathfrak{A} \models \phi[\bar{a}]$ sii $\mathfrak{B} \models \phi[\bar{b}]$.
2. Si $\alpha = \beta + 1$. $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \sim_{\beta+1} (\mathfrak{B}, \bar{b})$ si para cualquier $c \in A$ hay un $d \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, \bar{a}, c) \sim_\beta (\mathfrak{B}, \bar{b}, d)$. Y si para cualquier $d \in B$ hay un $c \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, \bar{a}, c) \sim_\beta (\mathfrak{B}, \bar{b}, d)$.
3. Si α es límite. $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \bar{b})$ si para todo $\beta < \alpha$ se cumple que $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \sim_\beta (\mathfrak{B}, \bar{b})$

Lo primero que nos gustaría mencionar es que dicha relación es una relación de equivalencia, la prueba de dicho hecho se hace por inducción sobre ordinales y se encuentra en [21].

Definición 1.2.10. Dada una $\mathfrak{A}$ $L-$estructura numerable definimos el siguiente conjunto de fórmulas de $L_{\omega_1,\omega}$ recursivamente sobre los ordinales menores a ω_1.

- Dada $\bar{a} \in A^n$ y $\alpha = 0$, definimos:

$$\theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},0}(\bar{x}) = \bigwedge_{\phi \in \Delta} \phi(\bar{x})$$

Donde $\Delta = \{\phi | \mathfrak{A} \models \phi[\bar{a}]$ y φ es atómica o negación de atómica$\}$.

- Dada $\bar{a} \in A^n$ y α límite, definimos:

$$\theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\alpha}(\bar{x}) = \bigwedge_{\gamma < \alpha} \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\gamma}(\bar{x})$$

- Dada $\bar{a} \in A^n$ y $\alpha = \beta + 1$, definimos:

$$\theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\alpha}(\bar{x}) = (\bigwedge_{c \in A} \exists w \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}c,\beta}(\bar{x}, w)) \wedge (\forall w \bigvee_{c \in A} \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}c,\alpha}(\bar{x}, w))$$

Lo primero que hay que notar es que las fórmulas definidas anteriormente están en $L_{\omega_1,\omega}$ pero ello se sigue de la hipótesis de que $\mathfrak{A}$ y L son numerables. Lo segundo que nos gustaría destacar es la relación que hay entre ellas y la relación de equivalencia definida anteriormente, justamente ello nos dice el siguiente lema.

Lema 1.2.6. *Dada $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $L-$estructuras numerables tenemos que para cualquier $\alpha < \omega_1$ y cualquier $\bar{a} \in A^n$ $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \bar{b})$ sii $\mathfrak{B} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\alpha}[\bar{b}]$.*

Demostración. La prueba la haremos por inducción sobre α ordinal menor a ω_1.

Si $\alpha = 0$ se sigue de la definición y si α es límite se sigue trivialmente por inducción.

Si $\alpha = \beta + 1$. $\boxed{\rightarrow}$ Supongamos que $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \sim_{\beta+1} (\mathfrak{B}, \bar{b})$. Sea $c \in A$ entonces por definición hay un $d \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, \bar{a}, c) \sim_\beta (\mathfrak{B}, \bar{b}, d)$. De donde por hipótesis de inducción $\mathfrak{B} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}c,\beta}[\bar{b}, d]$ y por definición de satisfacibilidad $\mathfrak{B} \models \exists w \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}c,\beta}(\bar{b}, w)$. Como c fue arbitraria $\mathfrak{B} \models \bigwedge_{c \in A} \exists w \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}c,\beta}(\bar{b}, w)$. De manera análoga pero utilizando la otra parte de la definición de $\sim_{\beta+1}$ se llega a que $\mathfrak{B} \models \forall w \bigvee_{c \in A} \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}c,\beta}(\bar{b}, w)$. Por lo tanto,

$$\mathfrak{B} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\beta+1}[\bar{b}].$$

$\boxed{\leftarrow}$ Supongamos que $\mathfrak{B} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\beta+1}[\bar{b}]$. Sea $c \in A$ por la hipótesis hay un $d \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}c,\beta}(\bar{b}, d)$. Por hipótesis de inducción $(\mathfrak{A}, \bar{a}, c) \sim_\beta (\mathfrak{B}, \bar{b}, d)$. El otro sentido es análogo. Por lo tanto, $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \sim_{\beta+1} (\mathfrak{B}, \bar{b})$. □

Antes de pasar a demostrar el teorema queda un último lema.

Lema 1.2.7. *Dada $\mathfrak{A}$ una $L-$estructura numerable entonces existe un $\alpha < |\mathfrak{A}|^+$ tal que si $\bar{a}, \bar{b} \in A^n$ y $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{A}, \bar{b})$ entonces para todo β se cumple que $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \sim_\beta (\mathfrak{A}, \bar{b})$.*

Demostración. La prueba es técnica y se hace por inducción sobre ordinales, la prueba está en [21]. □

De aquí obtenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.11. Al mínimo α tal que se cumple el lema anterior lo llamamos el **rango de Scott** de $\mathfrak{A}$.

Ahora sí tenemos las herramientas para probar el teorema de Scott.

Teorema de Scott. *Sea L numerable. Dada $\mathfrak{A}$ L-estructura numerable existe un $\varphi^{\mathfrak{A}}$ enunciado en $L_{\omega_1,\omega}$ tal que para cualquier $\mathfrak{B}$ L-estructura numerable tenemos que $\mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}$ sii $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.*

Demostración. Sea α el rango de Scott de $\mathfrak{A}$. Definamos a $\varphi^{\mathfrak{A}}$ de la siguiente manera:

$$\varphi^{\mathfrak{A}} = \theta^{\mathfrak{A}}_{\emptyset,\alpha} \wedge (\textstyle\bigwedge_{n\in\omega} \bigwedge_{\bar{a}\in A^n} \forall \bar{x}(\theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\alpha}(\bar{x}) \rightarrow \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\alpha+1}(\bar{x})))$$

Por el lema 1.2.7 $\alpha < \omega_1$ y dado que las suceciones finitas de un conjunto numerable forman un conjunto numerable tenemos que $\varphi^{\mathfrak{A}} \in Form_{L_{\omega_1,\omega}}$.

$\boxed{\leftarrow}$ Como $\sim_\alpha$ es relación de equivalencia $\mathfrak{A} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\emptyset,\alpha}$. Fijemos $n \in \omega$ y $\bar{a} \in A^n$, y sea $\bar{b} \in A^n$ tal que $\mathfrak{A} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\alpha}[\bar{b}]$. Por el lema 1.2.6 tenemos que $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{A}, \bar{b})$ y dado que α es el rango de Scott $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \sim_{\alpha+1} (\mathfrak{A}, \bar{b})$. Por lo que por lema 1.2.6 $\mathfrak{A} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\alpha+1}[\bar{b}]$. Por lo que $\mathfrak{A} \models \varphi^{\mathfrak{A}}$.

Como por hipótesis $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, por la proposición 1.2.1 $\mathfrak{A} \equiv_{\omega_1,\omega} \mathfrak{B}$ de donde concluimos que $\mathfrak{B} \models \varphi^{\mathfrak{A}}$.

$\boxed{\rightarrow}$ Para la vuelta lo que haremos será demostrar que $\mathfrak{A} \approx_K \mathfrak{B}$ y por lema 1.2.4 habremos acabado. Sea

$$K = \{f | f \text{ es monomorfismo parcial con dominio } \bar{a} \text{ y contradominio } \bar{b} \text{ t.q. } \mathfrak{B} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\alpha}[\bar{b}]\}.$$

Por hipótesis $\mathfrak{B} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\emptyset,\alpha}$ por lo que $\emptyset \in K$.

Sea $f \in K$ tal que su dominio es $\bar{a}$, su contradominio $\bar{b}$ y sea $c \in A$. Por construcción $\mathfrak{B} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\alpha}[\bar{b}]$ y por hipótesis $\mathfrak{B} \models \forall \bar{x}(\theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\alpha}(\bar{x}) \rightarrow \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\alpha+1}(\bar{x})))$. Por ende $\mathfrak{B} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a},\alpha+1}[\bar{b}]$.

Pero por lema 1.2.6 se tiene que $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \sim_{\alpha+1} (\mathfrak{B}, \bar{b})$. Por lo que por defición hay un $d \in \mathfrak{B}$ tal que $(\mathfrak{A}, \bar{a}, c) \sim_\alpha (\mathfrak{B}, \bar{b}, d)$. De donde, de nuevo por lema 1.2.6 $\mathfrak{B} \models \theta^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}c,\alpha}[\bar{b}, d]$. Por lo tanto, extendamos f a $g = f \cup \{(c, d)\}$. Note que g construido de esta manera es monomorfismo ya que se preservan las fórmulas atómicas y por ende las libres de cuantificadores.

El caso de extender la imagen se hace de manera análoga.

Por lo tanto, por el lema 1.2.4 se tiene que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. □

1.2.3. Definibilidad

En esta sección, introduciremos una definición con la cual es posible que el lector esté familiarizado pero lo haremos en vistas de introducir dos conceptos que difícilmente son cubiertos en una clase introductoria a la teoría de modelos y que serán de suma importancia en el próximo capítulo.

Definición 1.2.12. Dada $\mathfrak{A}$ una $L-$estructura y $D \subseteq A^n$ y $E \subseteq A$ diremos que D **es definible sobre** E si existe $\bar{e} \in E^m$ y $\phi(\bar{x};\bar{y}) \in Form_{L_{\omega_1,\omega}}$ con $n+m$ variables libres tal que:

$$\bar{d} \in D \text{ sii } \mathfrak{A} \vDash \phi[\bar{d};\bar{e}].$$

Diremos simplemente que es definible, si es definible sobre A.

Con ello en mente estamos en posición de introducir la defención más importante de esta sección.

Definición 1.2.13. Dada $\mathfrak{A}$ una $L-$estructura. **Una propiedad** P **para conjuntos definibles es definible en** $\mathfrak{A}$ si para toda $\phi(\bar{x};\bar{y})$ en $L_{\omega_1,\omega}$ existe otra fórmula $\pi_\phi(\bar{y})$ en $L_{\omega_1,\omega}$ tal que para todo todo $\bar{b} \in A^m$ se satisface que:

$$\mathfrak{A} \vDash \pi_\phi[\bar{b}] \text{ sii } \{\bar{a} \in A^n | \mathfrak{A} \vDash \phi[\bar{a};\bar{b}]\} \text{ tiene la propiedad } P.$$

Antes de pasar a la siguiente definición daremos algunos ejemplos.

Ejemplos. 1. Sean $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$, P la propiedad "no tener números primos en ninguna coordenada", $\phi(\bar{x};\bar{y})$ y $\bar{b} \in A^m$, definamos a

$$\pi_\phi(\bar{y}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \forall x_i(\exists x_1 ... \exists x_{i-1} \exists x_{i+1} ... \exists x_n \phi(\bar{x},\bar{y}) \to \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3((\bigwedge_{i\neq j} z_i \neq z_j) \wedge (\bigwedge_{i\in\{1,2,3\}} \exists w_i(z_i w_i = x_i)))).$$

Claramente $\pi_\phi(\bar{y})$ cumple lo deseado porque la fórmula nos dice que todo elemento es dividido por tres números.

2. Sean $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$, P la propiedad "la primera entrada es de tamaño 13", $\phi(\bar{x},\bar{y})$ y $\bar{b} \in A^m$, definamos a

$$\pi_\phi(\bar{y}) := \exists x_1 ... \exists x_{13}(\bigwedge_{i=1}^{n}(\exists \bar{z}\phi(x_i,\bar{z};\bar{y})) \wedge (\bigwedge_{i\neq j} x_i \neq x_j) \wedge (\forall \bar{w}(\phi(\bar{w},\bar{y}) \to \bigvee_{i=1}^{n} w_1 = x_i)).$$

Definición 1.2.14. Dada $\mathfrak{A}$ una $L-$estructura. **Una propiedad** P **para conjuntos definibles es fuertemente definible en** $\mathfrak{A}$ si para toda $n \in \omega$ al agrandar L por una relación $n-$aria U_n existe un enunciado ϕ_n en el nuevo lenguaje tal que para todo $X \subseteq A^n$:

$$\mathfrak{A}_X \vDash \phi_n \text{ sii } X \text{ tiene la propiedad } P.$$

Donde $\mathfrak{A}_X$ es el modelo que se obtiene de $\mathfrak{A}$ al interpretar U_n como X.

En caso de que sólo se valga lo anterior para una determinada n diremos que la propiedad P es fuertemente definible para n.

Antes de pasar a demostrar que fuertemente definible implica definible, demos un ejemplo de ser fuertemente definible.

Ejemplo. Sean $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ y P la propiedad "tener un dos en alguna de las entradas". Para cada $n \in \omega$ sea U_n una relación $n-$aria que no se encuentra en nuestro lenguaje. Con ello definamos

$$\phi_n := \exists x_1 ... \exists x_n(U_n(x_1, ..., x_n) \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} x_i = 1+1))$$

para cada $n \in \omega$.

Claramente ϕ_n cumple lo deseado.

Proposición 1.2.4. *Sea $\mathfrak{A}$ una $L-$estructura. Si la propiedad P para conjuntos definibles es fuertemente definible en $\mathfrak{A}$ entonces la propiedad P es definible en $\mathfrak{A}$.*

Demostración. Sea P una propiedad para conjuntos definibles que es fuertemente definible y sea $\phi(\bar{x};\bar{y})$ una fórmula con $n+m$ variables libres. Note que dado $\bar{b} \in A^m$ se tiene que $\{\bar{a} \in A^n | \mathfrak{A} \models \phi[\bar{a},\bar{b}]\} \subseteq A^n$, por ende consideremos ϕ_n.

Sea $\bar{y}$ una $m-$ada de variables que no ocurren en ϕ_n. Definamos $\pi_\phi(\bar{y})$ como la fórmula que se obtiene de ϕ_n al sustituir cada ocurrencia de $U_n(\bar{x})$ por $\phi(\bar{x};\bar{y})$.

Por construcción $\pi_\phi(\bar{y})$ es tal que dada $\bar{b} \in A^m$ y $X := \{\bar{a} \in A^n | \mathfrak{A} \models \phi[\bar{a},\bar{b}]\}$ se tiene que:

$$\mathfrak{A}_X \models \phi_n \ \text{ sii } \mathfrak{A} \models \pi_\phi[\bar{b}]$$

ya que se cambió U_n por la definición del conjunto X.

Por lo tanto, concluimos que dada $\bar{b} \in A^m$ se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \pi_\phi[\bar{b}] \ \text{ sii } \{\bar{a} \in A^n | \mathfrak{A} \models \phi[\bar{a};\bar{b}]\} \ \text{ tiene la propiedad } P.$$

□

Nos gustaría destacar que aunque las propiedades definidas en esta sección son hasta cierto punto triviales, en el siguiente capítulo veremos que dos propiedades nada triviales como la dimenisón y la irreducibilidad son definibles en campos algebraicamente cerrados (ver sección 2.4).

Con ello terminamos nuestra introducción a teoría de modelos en lógicas infinitarias. En caso de querer seguir su estudio recomendamos [23].

1.3. Geometría Algebraica

En esta sección se enunciarán las definiciones básicas de Geometría Algebraica clásica así como algunos teoremas básicos para que el lector se familiarice con las definiciones. Dichos conceptos serán sumamente importantes para comprender nuestro último grupo de axiomas de los campos pseudo-exponenciales. Todas las definciones son respecto a F un campo algebraicamente cerrado. Un campo algebraicamente cerrado es un campo tal que todo polinomio con coeficientes en F distinto de cero tiene una solución en el campo. Todo lo presentado en esta sección se encuentra con más detalle en [27] y [12].

1.3.1. General

Antes de dar la definción de variedad afín [3] es necesario dar dos definiciones.

Definición 1.3.1. Dados $Y \subseteq F^n$ y K un subcampo de F o K una extensión de campo de F definimos:

$$\mathbb{I}_K(Y) = \{f \in K[x_1,...,x_n] | \forall \bar{y} \in Y, f(\bar{y}) = 0\}$$

Y la relación recíproca:

Dado $S \subseteq F[x_1,...,x_n]$ definimos:

[3] En este texto escribiremos indistintamente variedad afín, variedad y variedad algebraica pero el lector debe ser consciente que existen otro tipo de variedades que no son afines.

$$\mathbb{V}_K(S) = \{\bar{k} \in K^n | \forall f \in S, \ \ f(\bar{k}) = 0\}$$

La razón por la cual introdujimos una notación tan cargada como lo es $\mathbb{I}_K(Y)$ y $\mathbb{V}_K(S)$ es porque para la introducción de nuestro último axioma (ver sección 2.4) será necesario difereneciar el lugar donde se están tomando los polinomios y los puntos.

Afortunadamente en esta sección podremos simplificar la notación por $\mathbb{I}(Y)$ y $\mathbb{V}(S)$ dado que siempre tomaremos los polinomios sobre el campo F y las soluciones en F^n.

Ahora sí, estamos listos para dar la defineción más elemental e importante de geometría algebraica.

Definición 1.3.2. $V \subseteq F^n$ es **variedad afín** si existe un $S \subseteq F[x_1, ..., x_n]$ tal que $\mathbb{V}(S) = V$.

Observe que nuestra definición de variedad afín es la definición de conjunto algebraico afín en la literatura.[4]

Las siguientes tres proposiciones nos servirán para familiarizarnos con las definiciones anteriores.

Lema 1.3.1. *Sean $X, Y \subseteq F^n$, V variedad y $S, P \subseteq F[x_1, ..., x_n]$ entonces:*

1. $\mathbb{I}(X)$ *es un ideal.*
2. *Si* $X \subseteq Y$ *entonces* $\mathbb{I}(Y) \subseteq \mathbb{I}(X)$.
3. *Si* $S \subseteq P$ *entonces* $\mathbb{V}(P) \subseteq \mathbb{V}(S)$.
4. $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$.
5. $S \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{V}(S))$.
6. $X \subseteq \mathbb{V}(\mathbb{I}(X))$.

Demostración. Las pruebas son relativamente sencillas por lo tanto únicamente haremos la prueba de 4. para ejemplificar las pruebas al lector.

$\boxed{\subseteq}$ Sea $a \in V$, por definición de $\mathbb{I}(V)$ para todo $f \in \mathbb{I}(V)$ tenemos que $f(a) = 0$. Luego por definición de $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$ ello implica que $a \in \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$.

$\boxed{\supseteq}$ Como V es una variedad hay un $S \subseteq F[x_1, ..., x_n]$ tal que $\mathbb{V}(S) = V$. Claramente $S \subseteq \mathbb{I}(V)$, de donde por 2, $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) \subseteq \mathbb{V}(S)$. Por lo tanto, $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) \subseteq V$. $\square$

Lema 1.3.2. *Si V, W son variedades entonces $V \cap W$ y $V \cup W$ lo son.*

Demostración. Afirmamos que $V \cap W = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V) + \mathbb{I}(W))$, donde $\mathbb{I}(V) + \mathbb{I}(W) = \{f + g | f \in \mathbb{I}(V)$ y $g \in \mathbb{I}(W)\}$, y que $V \cup W = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V)\mathbb{I}(W))$, donde $\mathbb{I}(V)\mathbb{I}(W) = \{fg | f \in \mathbb{I}(V)$ y $g \in \mathbb{I}(W)\}$.

Realicemos la prueba de la primera igualdad, es decir, demostremos que:

$$V \cap W = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V) + \mathbb{I}(W)).$$

La contención de derecha a izquierda es trivial por lo que realicemos la otra contención. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que existe $a \in \mathbb{V}(\mathbb{I}(V) + \mathbb{I}(W))$ tal que $a \notin V \cap W$; supongamos sin pérdida de generalidad que $a \notin V$. Como $a \notin V$ y $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$, al ser V una

[4]Ver [12] por ejemplo.

variedad, se tiene que existe un $f \in \mathbb{I}(V)$ tal que $f(a) \neq 0$. De donde concluimos que $f + 0(a) \neq 0$, lo cual es una contradicción dado que $f + 0 \in \mathbb{I}(V) + \mathbb{I}(W)$. Por lo tanto, se tiene que

$$V \cap W = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V) + \mathbb{I}(W)).$$

La prueba de la otra igualdad es análoga. □

Lema 1.3.3. *Sean $V, W \subseteq F^n$ variedades, entonces:*

1. *Si $V \subsetneq W$ entonces $\mathbb{I}(W) \subsetneq \mathbb{I}(V)$.*
2. *Si $\mathbb{I}(W) = \mathbb{I}(V)$ entonces $V = W$.*

Demostración. 1. Como son variedades tenemos que $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$ y $W = \mathbb{V}(\mathbb{I}(W))$. Como la contención es propia, hay un $w \in \mathbb{V}(\mathbb{I}(W)) \backslash \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$, lo cual por defineión implica que $\forall f \in \mathbb{I}(W)$ $f(w) = 0$ y que existe un $g \in \mathbb{I}(V)$ tal que $g(w) \neq 0$. Como $g(w) \neq 0$ por definición $g \notin \mathbb{I}(W)$ y por ende $g \in \mathbb{I}(V) \backslash \mathbb{I}(W)$ Por lo tanto, dado que por 1.3.1 (2) se tiene la contención concluimos que $\mathbb{I}(W) \subsetneq \mathbb{I}(V)$.

2. Se sigue del lema 1.3.1(4) al aplicar $\mathbb{V}$ a ambos lados de la igualdad.

□

Lema 1.3.4. *Sea $Z \subseteq F^n$ y sea $X = \mathbb{V}(\mathbb{I}(Z))$ entonces $\mathbb{I}(X) = \mathbb{I}(Z)$ y $\mathbb{V}(\mathbb{I}(Z))$ es la variedad más pequeña que contiene a Z.*

Demostración. Por lema 1.3.1(6) se tiene que $Z \subseteq \mathbb{V}(\mathbb{I}(Z)) = X$, por lo que por el lema 1.3.1(2) concluimos que $\mathbb{I}(X) \subseteq \mathbb{I}(Z)$. La otra contención se sigue del hecho de que si $x \in X$ y $f \in \mathbb{I}(Z)$ entonces $f(x) = 0$. Por ende, $\mathbb{I}(X) = \mathbb{I}(Z)$.

Para la segunda parte, supongamos que hay un W variedad tal que $Z \subseteq W \subseteq X$, por 1.3.1 (2) tenemos que $\mathbb{I}(X) \subseteq \mathbb{I}(W) \subseteq \mathbb{I}(Z)$. Dado que $\mathbb{I}(X) = \mathbb{I}(Z)$, nos queda que $\mathbb{I}(X) = \mathbb{I}(W)$. De donde por lema anterior (2) tenemos que $X = W$. Por lo tanto, X es mínima. □

Las siguientes dos definiciones son más específicas pero serán importantes en este trabajo.

Definición 1.3.3. Una variedad V es **reducible** si existen W, Y variedades tales que $V = W \cup Y$ y $W, Y \subsetneq V$. Decimos que es irreducible si no es el caso que sea reducible.

Definición 1.3.4. $I \subseteq F[x_1, ..., x_n]$ es un **ideal primo** si es un ideal y para todo f, g si $f \notin I$ y $g \notin I$ entonces $fg \notin I$.

El siguiente lema nos permitirá ver lo ligado que están estas dos definiciones.

Lema 1.3.5. *Dada V una variedad tenemos que son equivalentes.*

1. *$\mathbb{I}(V)$ es primo.*
2. *V es irreducible*

Demostración. $\boxed{\leftarrow}$ Haremos la prueba por contrapuesta. Supongamos que $\mathbb{I}(V)$ no es primo, entonces hay $f, g \notin \mathbb{I}(V)$ tal que $fg \in \mathbb{I}(V)$. Note que $V \subseteq \mathbb{V}(f) \cup \mathbb{V}(g)$ dado que para toda $v \in V$ $f(v)g(v) = 0$, lo cual implica que $f(v) = 0$ o $g(v) = 0$. Por ende, $V = (V \cap \mathbb{V}(f)) \cup (V \cap \mathbb{V}(g))$, por lema 1.3.2 son variedades y claramente están contenidas propiamente en V. Por lo tanto, V es reducible.

$\boxed{\rightarrow}$ Haremos la prueba por contrapuesta. Supongamos que V es reducible, entonces hay $W, Y \subsetneq V$ tales que $V = W \cup Y$. Al ser ambas variedades $W = \mathbb{V}(\mathbb{I}(W))$ y $Y = \mathbb{V}(\mathbb{I}(Y))$, para simplificar notación definamos $\mathbb{I}(W) = I$ y $\mathbb{I}(Y) = J$. Como $W, Y \subsetneq V$ y la unión es el total tenemos que $W \nsubseteq Y$ lo cual implica que $J \nsubseteq I$, es decir, hay un $p \in J \backslash I$. Análogamente hay un $q \in I \backslash J$. Por un lado, note que como $p \notin I$ por lema 1.3.1 (2) tenemos que $p \notin \mathbb{I}(X)$ y análogamente $q \notin \mathbb{I}(X)$. Por el otro lado, $pq \in JI \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J)) = \mathbb{I}(X)$. Por lo tanto, $\mathbb{I}(X)$ no es primo. □

Antes de continuar es preciso dar una definición.

Definición 1.3.5. Sea K un campo y $f_1, ..., f_n \in K[X]$ entonces el **ideal generado por** $f_1, ..., f_n$ es el conjunto de combinaciones lineales con coeficientes en $K[X]$, a dicho conjunto lo denotaremos por $< f_1, ..., f_n >_K$.

Decimos que un ideal I es generado por $f_1, ..., f_n$ si

$$I =< f_1, ..., f_n >_K .$$

Es sencillo ver que $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(\{f_1, ..., f_n\})$. Más aún se tiene el siguiente teorema debido a Hilbert cuya prueba se encuentra en [27].

Teorema de bases de Hilbert. *Si $I \subseteq F[x_1, ..., x_n]$ es un ideal y F es un campo entonces I es finitamente generado.*

Los siguientes dos lemas serán muy útiles al momento de escribir ciertos axiomas en nuestro lenguaje.

Lema 1.3.6. *Si V es una variedad entonces $V = \mathbb{V}(S)$ para algún S finito.*

Demostración. Por el lema 1.3.1(4) $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$ y por el teorema de las bases de Hilbert hay $f_1, ..., f_n$ que generan $\mathbb{I}(V)$. Trivialmente $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = \mathbb{V}(\{f_1, ..., f_n\})$. Por lo que tomando $S = \{f_1, ..., f_n\}$ hemos terminado. □

Lema 1.3.7. *Si V es una variedad entonces $V = V_1 \cup ... \cup V_n$ para $V_i \subseteq V$ variedades irreducibles.*

Demostración. Si V es irreducible hemos acabado. Entonces supongamos que V es reducible entonces por definición hay $W, Y \subsetneq V$ variedades tales que $V = W \cup Y$. Si W, Y son irreducibles hemos acabado, si no repetimos el proceso hasta que terminemos. Afirmamos que dicho proceso termina en un número finito de pasos.

Si no fuera finito entonces tendríamos $\{X_n\}_{n \in \omega}$ y una cadena infinita de la siguiente forma:

$$X \supsetneq X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq ...$$

Ahora bien, por el lema 1.3.3 nos queda que:

$$\mathbb{I}(X) \subsetneq \mathbb{I}(X_0) \subsetneq \mathbb{I}(X_1) \subsetneq ...$$

Considere $I = \bigcup_{i \in \omega} \mathbb{I}(X_i)$, claramente I es un ideal ya que tenemos un cadena. Al ser I ideal por el Teorema de bases de Hilbert hay $f_1, ..., f_l$ generadores de I. Dado que tenemos una cadena, hay un mínimo m tal que $f_1, ..., f_l \in \mathbb{I}(X_m)$ y dado que generan a I, tenemos que $\mathbb{I}(X_m) = I$. Por lo tanto, en particular $\mathbb{I}(X_m) = \mathbb{I}(X_{m+1})$, lo cual contradice el hecho de que tengamos una cadena infinita de contenciones propias.

Por lo tanto, nuestro proceso es finito y por ende para toda V hay $V_i \subseteq V$ variedades irreducibles tales que $V = V_1 \cup ... \cup V_n$. □

1.3.2. Topología de Zariski

En esta pequeña sección supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de topología como lo son el concepto de espacio topológico, base y topología generada por una base. En caso de no estarlo se sugiere consultar [25].

Definición 1.3.6. La **topología de Zariski** en F^n es la topología generada por B_z. Donde $B_z = \{U_f\}_{f \in F[x_1,\ldots,x_n]}$ y $U_f = \{\bar{a} \in F^n | f(\bar{a}) \neq 0\}$.

Lo primero que debemos demostrar es que B_z es base y precisamente ello es nuestra primer proposición.

Proposición 1.3.1. *B_z es base.*

Demostración. La primera parte de la definición se cumple porque todo $\bar{a} \in F^n$ es tal que $\bar{a} \in U_1$, donde 1 es el polinomio constante 1. Para la segunda parte, sean $\bar{a} \in U_f$ y $\bar{a} \in U_g$, note que $\bar{a} \in U_{fg} \subseteq U_f \cap U_g$. Por lo tanto, B_z es base. □

El siguiente hecho nos permitirá caracterizar a los conjuntos cerrados.

Proposición 1.3.2. *Sea $Z \subseteq F^n$ entonces Z es cerrado sii Z es una variedad.*

Demostración. $\boxed{\rightarrow}$ Z es cerrado sii $Z^c \in \tau$ sii $Z^c = \bigcup_{i \in I} U_{f_i}$ [5]. Por lo tanto $Z = \mathbb{V}(\{f_i | i \in I\})$, es decir, Z es una variedad.

$\boxed{\leftarrow}$ Sea Z una variedad, es decir, $Z = \mathbb{V}(\mathbb{I}(Z))$. Dado que $x \notin Z$ si hay un $f \in \mathbb{I}(Z)$ tal que $f(x) \neq 0$, definamos f_x al testigo para cada una de las $x \notin Z$. Note que $Z^c = \bigcup_{x \notin Z} U_{f_x}$, lo cual implica que Z^c es abierto y por ende Z es cerrado. □

Por lo que tenemos que los conjuntos cerrados en la topología de Zariski son exactamente las variedades. Con ello es fácil demostrar el siguiente corolario.

Corolario 1.3.1. *Dado $Z \subseteq F^n$ tenemos que $\bar{Z} = \mathbb{V}(\mathbb{I}(Z))$.*

1.3.3. Dimensión

Como su nombre lo dice en esta sección se estudiará el concepto de dimensión de una variedad algebraica. La razón por la cual tiene su propia sección es por su importancia y por el hecho de que se utilizarán conceptos desarrollados en las dos secciones anteriores.[6]

Definición 1.3.7. Dada una variedad irreducible V definimos su **dimensión** como el largo máximo de una cadena descendente de variedades irreducibles contenidas en V.

Note que la definición anterior tiene sentido por el lema 1.3.7. Ahora bien, para la siguiente definición será necesario definir primero un concepto.

Definición 1.3.8. Dados $X \subseteq F$ y K subcampo de F definimos el **grado de trascendencia de X sobre K** como:

[5] Se sigue trivialmente de la definción de la topología generada por una base.

[6] En esta sección a diferencia de las secciones anteriores únicamente se enunciarán las proposiciones sin prueba, ya que desarrollar la maquinaria para hacer las pruebas se encuentra fuera de los objetivos de este trabajo.

$$tr.d_K(X) = max\{l|\exists Y \subseteq X \text{ y } Y = \{y_1, ..., y_l\} \text{ t.q. } \forall p(x_1, ..., x_l) \in K[x_1, ..., x_l]\backslash\{0\}, p(y_1, ..., y_l) \neq 0\}$$

Notemos que dado $X \subseteq F$ tenemos que $tr.d_K(X) = tr.d_K(K(X))$, donde $K(X)$ es el mínimo campo que extiende a K y contiene a X.

Definición 1.3.9. Dada una variedad irreducible $V \subseteq F^n$ definimos su *dimensión* como $tr.d_F(F(V))$, donde $F(V)$ es igual al campo de fracciones de $F[V] = F[x_1, ..., x_n]/\mathbb{I}_F(V)$.

Lema 1.3.8. *Las definiciones 1.3.10 y 1.3.12 son equivalentes.*

Demostración. Consulte [27] para una demostración. □

Con ello en mente, estamos en condiciones de enunciar las dos proposiciones que utilizaremos en nuestro trabajo.

Proposición 1.3.3. *Sean $V, W \subseteq F^n$ variedades algebraicas tal que $V \subseteq W$, W es irreducible y $dim(V) = dim(W)$ entonces $V = W$.*

Demostración. Consulte [27] para una demostración. □

Proposición 1.3.4. *Sean $\bar{a} \in F^n$ y $K \subseteq F$ entonces $dim(\mathbb{V}_F(\mathbb{I}_K(\bar{a}))) = tr.d_K(\bar{a})$.*

Demostración. Es claro que $\mathbb{I}_K(\mathbb{V}_F(\mathbb{I}_K(\bar{a}))) = \mathbb{I}_K(\bar{a})$ pues $\bar{a} \in \mathbb{V}_F(\mathbb{I}_K(\bar{a}))$. Por lo que $K(\bar{a}) \cong K(\mathbb{V}_F(\mathbb{I}_K(\bar{a})))$, por la definición 1.3.12 concluimos que

$$dim(\mathbb{V}_F(\mathbb{I}_K(\bar{a}))) = tr.d_K(\bar{a}).$$

□

Capítulo 2

Axiomatización de los Campos Pseudo-exponenciales

Dada la cantidad de definiciones que deben ser introducidas para que sean entendibles nuestros axiomas, lo que haremos será ir dando definiciones, lemas para familiarizarnos con las definiciones y posteriormente presentaremos el axioma (en negritas y con número romano), para por último, en caso de que podamos [1], demostrar que $\mathbb{C}_{exp}$ lo satisface.

Antes de dar los axiomas es necesario fijar el lenguaje con el cual trabajaremos, lo denotaremos por L. Nuestro lenguaje consta de dos constantantes c_0 y c_1, tres funciones binarias $+, -, \cdot$, una operación $1-$aria $1/m\cdot$ para cada $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, una relación binaria E y una relación $n-$aria $V(x_1, ..., x_n)$ para cada variedad algebraica definible e irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Es decir, L será:

$$L = \{c_0, c_1\} \cup \{-, +, \cdot\} \cup \{1/m\cdot\}_{m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \cup \{E(x, y)\} \cup \{V_i\}_{i\in I}$$

Con ello podremos escribir nuestro primer conjunto de axiomas que son los de campo algebraicamente cerrrado de característica cero.

I Campo algbráicamente cerrrado de característica cero.

Con la suma tenemos un grupo abeliano:

$\forall x\forall y\forall z((x + y) + z = x + (y + z))$ (Asociatividad)
$\forall x(x + c_0 = x = c_0 + x)$ (Neutro)
$\forall x\exists y(x + y = c_0 = y + x)$ (Inversos)
$\forall x\forall y(x + y = y + x)$ (Conmutatividad)

Con el producto (sin el cero) tenemos un grupo abeliano:

$\forall x\forall y\forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$ (Asociatividad)
$\forall x(x \cdot c_1 = x)$ (Neutro)
$\forall x\exists y(x \neq c_0 \to x \cdot y = c_1)$ (Inversos)

[1] Por ello nos referimos a que no es un problema abierto.

$\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$ (Conmutatividad)

Algebráicamente cerrado:

Para cada $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ definamos

$$\phi_n := \forall x_0 \forall x_1 ... \forall x_{n-1} \exists y (y^n + x_{n-1} y^{n-1} + ... + x_1 y + x_0 = c_0)$$

De característica 0:

Para cada $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ definamos

$$\psi_n := \forall x ((x \neq c_0) \rightarrow nx \neq c_0)$$

Hasta ahora únicamente hemos necesitado la lógica de primer orden, desafortunadamente en el siguiente axioma será necesario utilizar la lógica infinitaria. Para simplificar la lectura del documento a partir de este momento y en lo que resta del trabajo convendremos escribir 0 por c_0 y 1 por c_1. Además si $\mathfrak{A}$ es un campo algebraicamente cerrado, A^* será $A \backslash \{0\}$, como usualmente se utiliza.

Como mencionamos en la introducción, la idea es que $\mathbb{C}_{exp}$ sea modelo de nuestra axiomatización, por ende querremos que E se comporte como la gráfica de la función exponencial.[2] Para ello le pediremos que sea un homomorfismo de A a A^* y que sea suprayectivo. Además pediremos que el núcleo de E sea estándar, es decir, que $Ker_E = \tau \mathbb{Z}$ para algún τ trascendente sobre $\mathbb{Q}$.

II Caracterización de E.

Función:

$\forall x \exists y (E(x, y) \wedge \forall z (E(x, z) \rightarrow z = y))$

Suprayectivo en el grupo multiplicativo:

$\forall x \exists y (x \neq 0 \rightarrow E(y, x))$

Homomorfismo de A a A^*:

$\forall x \forall y \forall z \forall w \forall m ((E(x, z) \wedge E(y, w) \wedge E(x + y, m)) \rightarrow z.w = m)$

Núcleo estándar:

Sea $\{V_n(x)\}_{n \in \omega}$[3] una enumeración de las variedades irreducibles en $\mathbb{Q}$.

$$\exists y ((\bigwedge_{i=1}^{\infty} \neg V_n(y)) \wedge \forall x (E(x, 1) \rightarrow ((\bigvee_{i=1}^{\infty} x = iy) \vee (\bigvee_{i=1}^{\infty} x = -iy)))$$

[2]La razón por la cual es una relación binaria en vez de una función es por cuestiones técnicas que se verán en el último capítulo.

[3]Es pertinente notar que al ser variedades irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ en 1 variable, son conjuntos finitos de puntos algebraicos.

Note que este último enunciado afirma que y es trascendente sobre los racionales, ya que dado $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ podemos considerar $\mathbb{V}(p)$ y por el lema 1.3.6:

$$\mathbb{V}(p) = V_1 \cup ... \cup V_n,$$

donde cada una de las variedades V_i es irreducible para $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto, las tenemos en nuestro lenguaje y dado que $y \notin V_i$ para toda i, $y \notin \mathbb{V}(p)$. Por ende $p(y) \neq 0$ y como $p(x)$ era un polinomio arbitrario concluimos que y es trascendente.

Recordemos que por $\mathbb{C}_{exp}$ entendemos la siguiente escructura

$$\langle \mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot, exp, \{V_i^{\mathbb{C}}\}_{i \in I} \rangle.$$

Lema 2.0.9. *$\mathbb{C}_{exp}$ satisface los axiomas I y II.*

Demostración. Que $\mathbb{C}_{exp} \vDash I$ se sigue de como se definen las operaciones en los complejos y el teorema fundamental del álgebra. En cuanto a la segunda parte recordemos que $e^{(a+bi)} = e^a(cosb + isenb)$, de donde la suprayectividad y el ser homomorfismo se siguen trivialmente. Mientras que notemos que $Ker_{exp} = 2\pi i\mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\mathbb{C}_{exp}$ satisface los axiomas I y II. □

A la clase de estructuras que satisfacen los axiomas I y II las denotaremos por $\mathcal{E}_{est}$.

Dado que se hará referencia continuamente al dominio e imagen de E, dada $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$, definimos

$$D_{\mathfrak{A}} := \{x \in A | \exists y \in A,\, E(x, y)\}$$

y para $X \subseteq A$ definimos:

$$E_{\mathfrak{A}}(X) = \{y \in A | \exists x \in X,\ E(x, y)\}.$$

Observación 1. *Observe que en este caso $D_{\mathfrak{A}} = A$, pero en el siguiente capítulo trabajaremos con estructuras que satisfagan parcialmente los primero dos axiomas y habrá casos en donde $D_{\mathfrak{A}} \subsetneq A$.*

2.1. Predimensión y la propiedad de Schanuel

Lo que se realizará en esta sección será definir una predimensión [4], obtener algunos resultados básicos en torno a la misma para más tarde presentar la propiedad de Schanuel. Antes de ello, es preciso introducir un poco de notación, por $X \subseteq_{fin} A$ denotaremos que $X \subseteq A$ y que X es un conjunto finito.

Definición 2.1.1. Dado $X \subseteq A$ definimos la **trascendencia** de X como:

$$tr(X) = max\{l | \exists Y \subseteq X \text{ y } Y = \{y_1, ..., y_l\} \text{ t.q. } \forall p(x_1, ..., x_l) \in \mathbb{Q}[x_1, ..., x_l] \backslash \{0\},\ p(y_1, ..., y_l) \neq 0\}$$

Notemos que dados $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ y $X \subseteq_{fin} A$ tenemos que $tr(X) = tr(\mathbb{Q}(X))$[5] y que $tr(X) = tr.d_{\mathbb{Q}}(X)$[6].

En lo que sigue para cualquier $X \subseteq A$ denotemos por $\langle X \rangle$ el espacio vectorial generado por X sobre $\mathbb{Q}$ y por $lin(X)$ la dimensión de dicho espacio.

[4] La predimensión que definiremos es un caso particular de una predimensión en el sentido de Hrushovski [6].

[5] Para realizar la prueba de esto, es necesario desarrollar mucha teoría entorno al grado de trascendencia, sugerimos al lector consultar [30] para ello.

[6] Dicha notación se introdujo en la definición 1.3.8 del capítulo anterior.

Definición 2.1.2. Dados $X \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$ y $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ definimos la **predimensión** de X como:

$$\delta_{\mathfrak{A}}(X) = tr(X \cup E_{\mathfrak{A}}(X)) - lin(X).$$

Dados $X, Y \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$ definimos:

$$\delta_{\mathfrak{A}}(X/Y) := \delta_{\mathfrak{A}}(X \cup Y) - \delta_{\mathfrak{A}}(Y).$$

En caso de que $Z \subseteq D_{\mathfrak{A}}$ sea infinito y dado $m \in \mathbb{Z}$ diremos que $\delta_{\mathfrak{A}}(X/Z) \geq m$ sii para cualquier $Z' \subseteq_{fin} Z$ hay un Z'' tal que $Z' \subseteq Z'' \subseteq_{fin} Z$ y $\delta_{\mathfrak{A}}(X/Z'') \geq m$ y diremos que $\delta_{\mathfrak{A}}(X/Z) = m$ sii $\delta_{\mathfrak{A}}(X/Z) \geq m$ y no es el caso que $\delta_{\mathfrak{A}}(X/Z) \geq m + 1$.

De forma análoga, dados $X, Y \subseteq_{fin} A$ tenemos que:

1. $tr(X/Y) := tr(X \cup Y) - tr(Y)$.

2. $lin(X/Y) := lin(X \cup Y) - lin(Y)$.

Antes de continuar es preciso demostrar una pequeña proposición.

Proposición 2.1.1. *Si $X \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$ entonces se tiene que $tr(X \cup E(X)) = tr(\langle X\rangle \cup E(\langle X\rangle))$ y que $lin(X) = lin(\langle X\rangle)$.*

Demostración. La primera igualdad se sigue del hecho de que

$$X \cup E(X) \subseteq \langle X\rangle \cup E(\langle X\rangle) \subseteq \mathbb{Q}(X \cup E(X))$$

y de que la trascendencia respeta contenciones.

La segunda igualdad de que $\langle X\rangle = \langle\langle X\rangle\rangle$. □

Nota. Si $W \subseteq D_{\mathfrak{A}}$ es un $\mathbb{Q}-$espacio vectorial de dimensión finita y $B_0 \subseteq W$ es base de W, se tiene que $lin(W) = lin(B_0)$ y que $tr(W \cup E(W)) = tr(B_0 \cup E(B_0))$; por lo que tiene sentido ampliar la noción de predimensión a $\mathbb{Q}-$espacios vectoriales de dimensión finita.

Dados $W \subseteq D_{\mathfrak{A}}$ un $\mathbb{Q}-$espacio vectorial de dimensión finita y $B_0 \subseteq W$ cualquiera de sus bases definimos $\delta_{\mathfrak{A}}(W) := \delta_{\mathfrak{A}}(B_0)$.

De dicha definición y la proposición 2.1.1 se sigue que dado $X \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$ se cumple que $\delta_{\mathfrak{A}}(X) = \delta_{\mathfrak{A}}(\langle X\rangle)$.

A partir de ahora si no hay confusión escribiremos únicamente δ en vez de $\delta_{\mathfrak{A}}$ y D en vez de $D_{\mathfrak{A}}$. Antes de comenzar a trabajar con δ demostraremos dos proposiciones en torno a $tr(X)$ y $lin(X)$ que nos serán sumamente útiles.

Dado X un conjunto denotaremos por $\mathcal{P}^{\omega}(X)$ al conjunto potencia finito de X, es decir, el conjunto formado por los subconjuntos finitos de X. Y dado un conjunto Z y $f : \mathcal{P}^{\omega}(Z) \to \mathbb{Z}$ diremos que f es no creciente si dados $Y \subseteq Y' \subseteq_{fin} Z$ entonces $f(Y') \leq f(Y)$.

Proposición 2.1.2. *Dados $X \subseteq_{fin} A$ y $Z \subseteq A$ entonces las funciones*

$$lin(X/\cdot), tr(X/\cdot) : \mathcal{P}^{\omega}(Z) \to \mathbb{Z}$$

son no crecientes.

Demostración. 1. Sea $Y \subseteq Y'$, por definición lo que debemos probar es equivalente a demostrar que

$$lin(Y') - lin(Y) \geq lin(X \cup Y') - lin(X \cup Y),$$

por ende demostremos esto último.

Sea $v_1, ..., v_n$ base de $\langle Y \rangle$. Como $Y \subseteq Y'$ entonces $\langle Y \rangle \subseteq \langle Y' \rangle$, por lo tanto extendamos $v_1, ..., v_n$ a una base de $\langle Y' \rangle$, $v_1, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+r}$. Por lo tanto, $lin(Y') - lin(Y) = r$. Análogamente podemos extender $v_1, ..., v_n$ a una base de $\langle Y \cup X \rangle$, $v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_l$. Notemos que $v_1, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+r}, w_1, ..., w_l$ genera $\langle Y' \cup X \rangle$, de donde $lin(Y' \cup X) \leq n + r + l$. Por lo tanto se sigue que:

$$lin(X \cup Y') - lin(X \cup Y) \leq n + r + l - (n + l) \leq r = lin(Y') - lin(Y).$$

2. Sea $Y \subseteq Y'$. Intuitivamente lo que sucede es que puede haber subconjuntos de X que sean algebraicamente independientes en $\mathbb{Q}(Y)$ pero que al pasar a $\mathbb{Q}(Y')$ se vuelvan algebrebraicamente dependientes. De ahí que:

$$tr(X/Y') \leq tr(X/Y).$$

La prueba formal es parecida a la del inciso anterior pero sería necesario introducir mucha maquinaria respecto al grado de trascendencia, ésta puede ser consultada en [30].

□

Proposición 2.1.3. *Dados $X, Y \subseteq_{fin} A$ tenemos que*

$$lin(\langle X \rangle \cup \langle Y \rangle) - lin(\langle Y \rangle) = lin(\langle X \rangle) - lin(\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle).$$

Más aún, si X y Y son tales que $\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle = \{0\}$ entonces

$$lin(X \cup Y) - lin(Y) = lin(X) - lin(X \cap Y).$$

Demostración. La prueba de la modularidad se realiza de manera análoga a la primera parte de la proposición anterior.

La segunda afirmación se sigue del hecho de que si X y Y son como los pide la hipótesis, se tiene que $\langle X \cap Y \rangle = \{0\} = \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle$ y de que $\langle X \cup Y \rangle = \langle \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle \rangle$. □

Nota. A la propiedad uno de la proposición anterior se le conoce como *modularidad*, no lo demostraremos en este escrito pero $tr(\cdot)$ no es modular, ver [5] para una prueba.

Corolario 2.1.1. *Dados $X, Y \subseteq_{fin} D$ tales que $\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle = \{0\}$, se tiene que:*

$$\delta(X \cup Y) - \delta(Y) \leq \delta(X) - \delta(X \cap Y).$$

Más aún, si $X, y \subseteq_{fin} D$, se tiene que:

$$\delta(\langle X \rangle \cup \langle Y \rangle) - \delta(\langle Y \rangle) \leq \delta(\langle X \rangle) - \delta(\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle).$$

Demostración. Por definición tenemos que:

$$\delta(X \cup Y) - \delta(Y) = tr(X \cup Y \cup E(X \cup Y)) - lin(X \cup Y) - tr(Y \cup E(Y)) + lin(Y),$$

reagrupando y dado que $E(X) \cup E(Y) = E(X \cup Y)$ llegamos a:

$$tr(X \cup Y \cup E(X) \cup E(Y)) - tr(Y \cup E(Y)) - (lin(X \cup Y) - lin(Y)).$$

Por la proposición 2.1.3 y definición de $tr(./.)$:

$$\begin{aligned} tr(X \cup Y \cup E(X) \cup E(Y)) - tr(Y \cup E(Y)) - (lin(X \cup Y) - lin(Y)) = \\ tr(X \cup E(X)/Y \cup E(Y)) - (lin(X) - lin(X \cap Y)). \end{aligned}$$

Debido a que $X \cap Y \subseteq Y$ por proposición 2.1.2:

$$\begin{aligned} tr(X \cup E(X)/Y \cup E(Y)) - (lin(X) - lin(X \cap Y) \leq \\ tr(X \cup E(X)/(Y \cap X) \cup E(Y \cap X)) - (lin(X) - lin(X \cap Y)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando de nuevo la definción de $tr(./.)$ y agrupando, nos queda que:

$$\begin{aligned} tr(X \cup E(X)) - tr((X \cap Y) \cup E(X \cap Y)) - (lin(X) - lin(X \cap Y)) = \\ tr(X \cup E(X)) - lin(X) - (tr((X \cap Y) \cup E(X \cap Y)) - lin(X \cap Y)) = \\ \delta(X) - \delta(X \cap Y). \end{aligned}$$

Por ende,

$$\delta(X \cup Y) - \delta(Y) \leq \delta(X) - \delta(X \cap Y).$$

La prueba de la segunda afirmación es análoga a la de la primera, sólo que se utiliza la primera parte de la proposición 2.1.3. □

Corolario 2.1.2. *Dados $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ y $B \subseteq_{fin} D$ tal que $|B| = n$ entonces $\delta(B) \leq n$.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre n.

Sea $n = 1$. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $\delta(\{b_1\}) = 2$, ésto sucede si y solo si $tr(\{b_1, E(b_1)\}) = 2$ y $lin(b_1) = 0$, lo cual es claramente una contradicción pues que $lin(b_1) = 0$ implica que $b_1 = 0$.

Supongámoslo para n y demostrémoslo para $n + 1$. Sean $B = \{b_1, ..., b_n, b_{n+1}\}$ y $B' \subseteq B$ base de $\langle B \rangle$. La prueba la haremos por casos:

1. **Caso 1:** Si $|B'| < |B|$ entonces por hipótesis de inducción $\delta(B') \leq |B'| \leq n + 1$. Pero debido a que $\delta(B') = \delta(\langle B' \rangle) = \delta(\langle B \rangle) = \delta(B)$ concluimos que:

$$\delta(B) \leq n + 1.$$

2. **Caso 2:** Si $|B| = |B'|$ entonces $B = B'$ y como B es linealemente independiente, se satisface que $\langle \{b_1, ..., b_n\} \rangle \cap \langle \{b_{n+1}\} \rangle = \{0\}$. De donde se tiene por el corolario 2.1.1 que:

$$\delta(B) \leq \delta(\{b_1, ..., b_n\}) + \delta(\{b_{n+1}\}),$$

por lo que por la base y nuestra hipótesis de inducción concluimos que:

$$\delta(\{b_1, ..., b_n\}) + \delta(\{b_{n+1}\}) \leq n + 1,$$

es decir, $\delta(B) \leq n + 1$.

□

A continuación demostraremos tres lemas más en torno a la predimensión que nos serán sumamente útiles a lo largo de la tesis.

Lema 2.1.1. *Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ y sean $X, Y \subseteq_{fin} D$ entonces*

$$\delta(X/Y) = tr(X \cup E(X)/Y \cup E(Y)) - lin(X/Y).$$

Demostración. Sean X, Y tales que cumplen con las hipótesis. Por las puras definiciones tenemos que:

$$\delta(X/Y) = \delta(X \cup Y) - \delta(Y) =$$
$$tr(X \cup Y \cup E(X \cup Y)) - lin(X \cup Y) - (tr(Y \cup E(Y)) + lin(Y).$$

Reacomodando y por definición de $tr(\cdot/\cdot)$ y $lin(\cdot/\cdot)$:

$$tr(X \cup Y \cup E(X \cup Y)) - lin(X \cup Y) - tr(Y \cup E(Y)) + lin(Y) =$$
$$tr(X \cup E(X) \cup Y \cup E(Y)) - tr(Y \cup E(Y)) - (lin(X \cup Y) - lin(Y)) =$$
$$tr(X \cup E(X)/Y \cup E(Y)) - lin(X/Y).$$

□

Lema 2.1.2. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{E}_{est}$ tales que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Sean $\bar{b}, \bar{c} \in D^n_{\mathfrak{B}}$ tales que $\langle \bar{b} \rangle / \mathfrak{A} = \langle \bar{c} \rangle / \mathfrak{A}$, donde por ello nos referimos a las clases laterales del espacio vectorial cociente, entonces*

$$\delta(\bar{b}/D_{\mathfrak{A}}) = \delta(\bar{c}/D_{\mathfrak{A}}).$$

Demostración. Note que lo que queremos demostrar es equivalente a lo siguiente:

$$\delta(\bar{b}/D_{\mathfrak{A}}) \geq m \text{ sii } \delta(\bar{c}/D_{\mathfrak{A}}) \geq m.$$

Por ende, demostraremos esto último.

$\boxed{\rightarrow}$ Supongamos que $\delta(\bar{b}/D_{\mathfrak{A}}) \geq m$ y sea $Z' \subseteq_{fin} A$. Como $\langle \bar{b} \rangle / \mathfrak{A} = \langle \bar{c} \rangle / \mathfrak{A}$, se tiene que:

$$c_1 = \Sigma^n_{j=1} q_{1,j} b_j + a_1$$
$$c_2 = \Sigma^n_{j=1} q_{2,j} b_j + a_2$$
$$...$$
$$c_m = \Sigma^n_{j=1} q_{m,j} b_j + a_m$$

Para algunos $a_i \in A$ para todo $i \in \{1, ..., m\}$. Análogamente hay $a_i^{'} \in A$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$ tales que para toda i:

$$b_i = \Sigma^m_{j=1} q_{i,j} c_j + a_i^{'}$$

Ahora bien, sea $Z'' = Z' \cup \{a_1, ..., a_m\} \cup \{a_1^{'}, ..., a_n^{'}\}$. Como $\delta(\bar{b}/D_{\mathfrak{A}}) \geq m$ por definición tenemos que existe $Z'' \subseteq Z''' \subseteq_{fin} A$ tal que $\delta(\bar{b}/Z''') \geq m$.

Note que $\delta(\bar{b}/Z''') = \delta(\bar{c}/Z''')$ ya que por construcción $\langle \bar{b} \cup Z''' \rangle = \langle \bar{c} \cup Z''' \rangle$. Por lo tanto, por definición concluimos que:

$$\delta(\bar{c}/D_{\mathfrak{A}}) \geq m.$$

$\boxed{\leftarrow}$ Análoga a la ida.

□

Lema 2.1.3. *Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ y sean $X, Y, Z \subseteq_{fin} D$ entonces:*

1. *Si $X \cup Z = Y \cup Z$ entonces $\delta(X/Z) = \delta(Y/Z)$. También se sigue si $\langle X \cup Z \rangle = \langle Y \cup Z \rangle$*
2. *Si $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$ entonces $\delta(Z/X) = \delta(Z/Y)$.*
3. *$\delta(X \cup Y/Z) = \delta(X/Y \cup Z) + \delta(Y/Z)$.*

Demostración. 1. Sean X, Y, Z tales que cumplen con las hipótesis. Por definición:

$$\delta(X/Z) = \delta(X \cup Z) - \delta(Z) = \delta(Y \cup Z) - \delta(Z) = \delta(Y/Z).$$

La segunda afirmación se sigue del hecho de que para todo $W \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$ se cumple que $lin(W) = lin(\langle W \rangle)$ y que $tr(W \cup E(W)) = tr(\langle W \rangle \cup E(\langle W \rangle))$

2. La prueba se sigue de la afirmación inmediatamente anterior.

3. Sean X, Y, Z tales que cumplen con las hipótesis.

$$\begin{aligned}\delta(X \cup Y/Z) &= \delta(X \cup Y \cup Z) - \delta(Z)\\ &= \delta(X \cup Y \cup Z) - \delta(Y \cup Z) + \delta(Y \cup Z) - \delta(Z)\\ &= \delta(X/Y \cup Z) + \delta(Y/Z).\end{aligned}$$

□

Con todo ello en mente estamos preparados para dar nuestro tercer axioma. Al tercer axioma lo llamaremos la propiedad de Schanuel, y afirma que si $X \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$ entonces:

$$\delta_{\mathfrak{A}}(X) \geq 0.$$

III Propiedad de Schanuel.

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $\{V_{p,q}\}_{(p,q)\in\omega\times\omega}$ una enumeración de las variedades irreducibles en $\mathbb{Q}$, donde la p se refiere al número de parámetros de $V_{p,q}$ y la q enumera las variedades de un parámetro fijo, definamos:

$$\begin{gathered}\theta_n := \forall x_1 ... \forall x_n \Big(\big(\bigwedge_{k_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \bigwedge_{k_n \in \mathbb{Z}} (\Sigma_{j=1}^{n} k_j x_j = 0 \to \bigwedge_{j \in \{1,\ldots,n\}} k_j = 0) \big) \to \\ \exists y_1 ... \exists y_n \Big((\bigwedge_{s \neq r, s, r \in \{1,\ldots n\}} y_s \neq y_r) \wedge \big(\bigwedge_{j \in \{1,\ldots n\}} \bigvee_{r \in \{1,\ldots,n\}} (y_j = \\ x_r \vee E(x_r, y_j)) \big) \wedge (\bigwedge_{l \in \omega} \neg V_{n,l}(y_1, ..., y_n)) \Big) \Big)\end{gathered}$$

La propiedad de Schanuel es entonces

$$\Theta = \{\theta_n\}_{n\in\omega}.$$

La propiedad escrita formalmente en $L_{\omega_1,\omega}$ parece muy complicada, pero simplemente nos dice que si $x_1, ..., x_n$ son linealmente independientes entonces hay al menos entre

$$x_1, ..., x_n, E(x_1), ..., E(x_n),$$

n algebraicamente independientes. Ello es trivialmente equivalente a lo mencionado justo antes de la formalización.

Notemos que si $\mathfrak{A} = \mathbb{C}_{exp}$ entonces lo que afirma el axioma III es que dados $\{x_1, ..., x_n\}$ entonces $tr(x_1, ..., x_n, expx_1, ..., expx_n) - lin(x_1, ..., x_n) \geq 0$, en otras palabras,

$$\delta_{\mathbb{C}}(x_1, ..., x_n) \geq 0.$$

En caso de que $\{x_1, ..., x_n\}$ sean $\mathbb{Q}$-linealmente independientes, ésto es precisamente la conjetura de Schanuel, es decir, la conjetura de Schanuel es equivalente a la no negatividad de la predimensión.

A la clase de estructuras que satisfacen los axiomas I, II y III las denotaremos por $\mathcal{E}_{est,sch}$. No es claro que dicha clase sea no vacía pero en la sección 3.1 demostraremos que no lo es. A continuación trabajaremos un poco dentro de dichas estructuras.

2.2. Subestructuras fuertes

Antes de definir lo que entendemos por subestructura fuerte es preciso demostrar el siguiente lema.

Lema 2.2.1. *Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est,sch}$. Si $X \subseteq_{fin} D$ y $Z \subseteq D$ infinito tal que $\delta(X/Z)$ es finita entonces existe un $Y \subseteq_{fin} Z$ tal que $\delta(X/Y) = \delta(X/Z)$.*

Demostración. Supongamos que $\delta(X/Z) = m$. Por la definición de dimensión relativa existe un $Z_0 \subseteq_{fin} Z$ tal que para todo $Z' \subseteq_{fin} Z$ que contenga a Z_0 se tiene que

$$\delta(X/Z') < m + 1.$$

Tomemos un Z_0 que satisface ello.

De nuevo por la definición de predimensión relativa, para el Z_0 tomado existe un $Z_1 \subseteq_{fin} Z$ que contiene a Z_0 tal que

$$\delta(X/Z_1) \geq m.$$

Tomemos un $Y \subseteq_{fin} Z$ que satisfaga la desigualdad anterior.

Ahora bien note que dado que $Z_0 \subseteq Y \subseteq Z$ se tiene que $\delta(X/Y) < m + 1$ y dado que por construcción $\delta(X/Y) \geq m$, concluimos que

$$\delta(X/Y) = m = \delta(X/Z).$$

□

Definición 2.2.1. Dados $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{E}_{est,sch}$ decimos que $\mathfrak{A}$ es **subestructura fuerte** de $\mathfrak{B}$, denotado por $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$, si tenemos que:

- $\mathfrak{A}$ es $L-$subestructura de $\mathfrak{B}$.
- $\delta_{\mathfrak{B}}(X/D_{\mathfrak{A}}) \geq 0$ para todo $X \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{B}}$.

Una observación trivial que es pertinente hacer en este momento por el uso que le daremos es la siguiente.

Observación 2. *Si* $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$ *y* $X \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$ *entonces* $\delta_{\mathfrak{A}}(X) = \delta_{\mathfrak{B}}(X)$.

De hecho, esto se sigue de que $\mathfrak{A}$ es $L-$subestructura de $\mathfrak{B}$ pues $tr(X)$ y $lin(X)$ se encuentran determinadas por polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$, los cuales al escribirse en nuestro lenguaje pasan de una estructura a la otra.

Lo primero que nos gustaría de la relación de ser subestructura fuerte es que fuera transitiva y justo ello será lo primero que demostraremos.

Lema 2.2.2. *Sean* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathcal{E}_{est,sch}$ *tales que* $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$ *y* $\mathfrak{B} \precsim \mathfrak{C}$ *entonces* $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{C}$.

Demostración. En la proposición 1.2.3 demostramos que el ser subestructura es una relación transitiva por lo que queda únicamente probar que se satisface la condición dos de ser subestructura fuerte.

Sea $Z \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{C}}$, si $\delta_{\mathfrak{C}}(Z/D_{\mathfrak{A}})$ es infinita entonces $\delta_{\mathfrak{C}}(Z/D_{\mathfrak{A}}) \geq 0$, por lo que suongamos que $\delta_{\mathfrak{C}}(Z/D_{\mathfrak{A}})$ es finita. Por ende, por el lema 2.2.1 existe $X \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$ tal que $\delta_{\mathfrak{C}}(Z/X) = \delta_{\mathfrak{C}}(Z/D_{\mathfrak{A}})$. Sea $Y \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{B}}$ tal que $\langle X \cup Y \rangle = \langle (Z \cup X) \cap D_{\mathfrak{B}} \rangle$. Es importante notar que:

$$\langle X \cup Y \rangle \subseteq \langle X \cup Z \rangle,$$

de donde conluimos que:

$$\langle X \cup Y \cup Z \rangle = \langle X \cup Z \rangle.$$

De ahí que $lin(X \cup Y \cup Z) = lin(X \cup Z)$ y como $lin(Y \cup X) = lin((X \cup Z) \cap D_{\mathfrak{B}})$, usando el hecho que lin es modular y que $D_{\mathfrak{A}} \subseteq D_{\mathfrak{B}}$ se concluye que $lin(Z/Y \cup X) = lin(Z/D_{\mathfrak{B}})$.

De donde por lema 2.1.1 tenemos que:

$$\delta_{\mathfrak{C}}(Z/Y \cup X) = tr(Z \cup E(Z)/Y \cup X \cup E(Y \cup X)) - lin(Z/Y \cup X),$$

ya que $lin(Z/Y \cup X) = lin(Z/D_{\mathfrak{B}})$ y que $tr(Z/.)$ es no creciente tenemos que $\delta_{\mathfrak{C}}(Z/X \cup Y) \geq \delta_{\mathfrak{C}}(Z/D_{\mathfrak{B}})$. Además, $\delta_{\mathfrak{C}}(Z/D_{\mathfrak{B}}) \geq 0$ por ser $\mathfrak{B} \precsim \mathfrak{C}$.

Por otro lado, como $\mathfrak{B} \precsim \mathfrak{C}$ por la observación 1. tenemos que $\delta_{\mathfrak{C}}(Y/X) = \delta_{\mathfrak{B}}(Y/X)$ y debido a que $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$ tenemos $\delta_{\mathfrak{B}}(Y/X) \geq 0$.

Ahora bien, note que como $\langle X \cup Z \rangle = \langle X \cup Y \cup Z \rangle$ se tiene que $\delta_{\mathfrak{C}}(Y \cup Z/X) = \delta_{\mathfrak{C}}(Z/X)$. De ahí que por el lema 2.1.2(3) $\delta_{\mathfrak{C}}(Y \cup Z/X) = \delta_{\mathfrak{C}}(Z/X \cup Y) + \delta_{\mathfrak{C}}(Y/X)$. Dado que ya hemos demostrado que ambos sumandos son mayores a cero nos queda que

$$\delta_{\mathfrak{C}}(Z/D_{\mathfrak{A}}) = \delta_{\mathfrak{C}}(Z/X) = \delta_{\mathfrak{C}}(Y \cup Z/X) \geq 0.$$

Es decir, se cumple la propiedad dos de ser subestructura fuerte y por lo tanto $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{C}$. $\square$

Proposición 2.2.1. *Sea* $\langle \mathfrak{A}_i \rangle_{i \in \omega}$ *una cadena de subestructuras fuertes tal que para toda* $i \in \omega$ *se tiene que* $\mathfrak{A}_i \in \mathcal{E}_{est,sch}$ *entonces* $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{A}_i \in \mathcal{E}_{est,sch}$ *y para todo* $i \in \omega$ $\mathfrak{A}_i \precsim \mathfrak{A}$.

Demostración. Definamos $\bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{A}_i$ de la forma usual (como se hizo en la proposición 1.2.3). Es claro que $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est,sch}$, que $D_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{i \in \omega} D_{\mathfrak{A}_i}$ y que si $B \subseteq A_i$ se cumple que $\delta_{\mathfrak{A}_i}(B) = \delta_{\mathfrak{A}}(B)$ pues $E^{\mathfrak{A}}(a, b)$ sii $E^{\mathfrak{A}_i}(a, b)$ para todo i tal que $a, b \in A_i$.

Por el lema 1.2.3 sabemos que para toda $i \in \omega$, $\mathfrak{A}_i$ es subestructura de $\mathfrak{A}$ en L, por lo que al igual que en la proposición anterior sólo queda probar que se satisface la condición dos de ser subestructura fuerte.

Sean $X \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$ e $i \in \omega$. Como contamos con una cadena, $X \subseteq_{fin} A_l$ para toda $l > j_0$ para algún $j_0 \in \omega$. Tomemos $j > j_0, i$, por lo tanto como ser subestructura fuerte es una relación transitiva, tenemos que $\mathfrak{A}_i \precsim \mathfrak{A}_j$ y como $X \subseteq_{fin} A_j$ por definición de ser subestructura fuerte concluimos que $\delta_{\mathfrak{A}_j}(X/D_{\mathfrak{A}_i}) \geq 0$.

Como $\delta_{\mathfrak{A}_j}(X) = \delta_{\mathfrak{A}}(X)$ tenemos que $\delta_{\mathfrak{A}}(X/D_{\mathfrak{A}_i}) \geq 0$. Por lo que, $\mathfrak{A}_i \precsim \bigcup_{i\in\omega} \mathfrak{A}_i$. Debido a que $i \in \omega$ fue tomada arbitrariamente hemos acabado. □

2.3. Dimensión y pregeometría

Ahora sí, con todo ello, estamos preparados a definir nuestra noción de dimensión y a partir de ésta nuestra geometría combinatoria que será tan importante al momento de demostrar que nuestra clase es no numerable categórica.

Definición 2.3.1. Dados $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est,sch}$ y $X \subseteq_{fin} D$ definimos la **dimensión** de X en $\mathfrak{A}$ como:

$$\partial_{\mathfrak{A}}(X) = min\{\delta(X')|X \subseteq X' \subseteq_{fin} D\}.$$

Primero notemos que dado que contamos con la propiedad de Schanuel, $\{\delta(X')|X \subseteq X' \subseteq_{fin} D\}$ está acotado inferiormente por cero por lo que existe el mínimo. En segundo lugar, note que si $X \subseteq X' \subseteq D$ entonces $\partial(X) \leq \partial(X')$

Los siguientes dos lemas nos permitirán familiarizarnos con la dimensión.

Lema 2.3.1. *Sea* $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est,sch}$

1. *Si* $X \subseteq X' \subseteq_{fin} D$ *son tales que* $\delta(X') = \partial(X)$ *entonces para todo* $Y \subseteq_{fin} D$ *se tiene que* $\delta(Y/X') \geq 0$.

2. *Dado* $X \subseteq_{fin} D$ *existe un* $X' \subseteq_{fin} D$ *tal que* $\delta(X' \cup X) = \partial(X)$. *Más aún, existe* X'' *linealmente independiente tal que* $\langle X''\rangle \cap \langle X\rangle = \{0\}$ *y que cumpla lo deseado.*

Demostración. 1. Sean X, X' como nos los piden las hipótesis y sea $Y \subseteq_{fin} D$. Por definición $\delta(Y/X') = \delta(Y \cup X') - \delta(X')$, ya que X' y Y son finitos. Dado que $X \subseteq X' \cup Y \subseteq_{fin} D$, al ser $\partial(X)$ el mínimo, tenemos que $\delta(Y \cup X') - \delta(X') \geq 0$. Por ende $\delta(Y/X') \geq 0$.

2. La existencia de X' se sigue trivialmente de la afirmación hecha después de la definición de dimensión, X' es un testigo del mínimo. Para la segunda afirmación, cosidere $X_0 := X' \backslash \{x \in X'|x \in \langle X\rangle\}$ y sea X'' una base de $\langle X_0\rangle$. Note que $lin(X \cup X'') = lin(X' \cup X)$ y que $tr(X \cup X'' \cup E(X \cup X'')) = tr(X' \cup X \cup E(X \cup X'))$, por lo que X'' cumple lo deseado.

□

Lema 2.3.2. *Dados* $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est,sch}$, $X \subseteq_{fin} D$ *y* $a, b \in D$ *entonces:*

1. $\partial(X) \leq \partial(X \cup \{a\}) \leq \partial(X) + 1$.

2. *Si* $\partial(\{a, b\} \cup X) = \partial(X)$ *entonces* $\partial(\{a\} \cup X) = \partial(X)$.

3. *Si* $\partial(\{a, b\} \cup X) = \partial(\{a\} \cup X)$ *y* $\partial(X) < \partial(\{b\} \cup X)$ *entonces* $\partial(\{a, b\} \cup X) = \partial(\{b\} \cup X)$.

4. *Si* $\partial(\{a\} \cup X) = \partial(X) = \partial(\{b\} \cup X)$ *entonces* $\partial(\{a, b\} \cup X) = \partial(X)$.

5. *Si* $\partial(\{a\} \cup X) = \partial(X)$ *entonces* $\partial(\{b\} \cup X) = \partial(\{a, b\} \cup X)$.

Demostración. 1. Ya sabemos que $\partial(X) \leq \partial(X \cup \{a\})$.

Para la otra desigualdad, sea $X \subseteq X'$ tal que $\delta(X') = \partial(X)$. Dado que $X \cup \{a\} \subseteq X' \cup \{a\} \subseteq D$ entonces

$$\delta(X' \cup \{a\}) \in \{\delta_{\mathfrak{A}}(C') | X \cup \{a\} \subseteq C' \subseteq_{fin} D\},$$

de donde $\partial(X \cup \{a\}) \leq \delta(X' \cup \{a\})$, por lo tanto será suficiente demostrar que $\delta(X' \cup \{a\}) - \delta(X') \leq 1$. Si $a \in \langle X' \rangle$, entonces el resultado es trivial, por lo que supongamos que $a \notin \langle X' \rangle$.

Como $a \notin \langle X' \rangle$, por el corolario 2.1.1 se tiene que

$$\delta(X' \cup \{a\}) - \delta(X') \leq \delta(\{a\}) - \delta(X' \cap \{a\}).$$

Debido a que $X' \cap \{a\} = \emptyset$ y que por el corolario 2.1.2 $\delta(\{a\}) \leq 1$, concluimos que

$$\delta(X' \cup \{a\}) \leq \delta(X') + 1$$

Por lo tanto, $\partial(X \cup \{a\}) \leq \partial(X) + 1$.

2. Trivial de 1.

3. De 1. se sigue trivialmente que $\partial(\{a, b\} \cup X) \geq \partial(\{b\} \cup X)$. Para la otra desigualdad

$$\begin{aligned} \partial(\{a, b\} \cup X) =& \partial(\{a\} \cup X) && \text{[Hipótesis 1]} \\ \partial(\{a\} \cup X) \leq& \partial(X) + 1 && \text{[Por 1.]} \\ \partial(X) + 1 \leq& \partial(X \cup \{b\}) && \text{[Hipótesis 2]} \end{aligned}$$

4. De 1. se sigue trivialmente que $\partial(\{a, b\} \cup X) \geq \partial(X)$. Para la otra desigualdad, suponga que X es linealmente independiente y considere

$$\{a\} \cup X \subseteq B' \subseteq_{fin} D \text{ y } \{b\} \cup X \subseteq B'' \subseteq_{fin} D$$

tales que

$$\partial(X \cup \{a\}) = \delta(B') \text{ y } \partial(X \cup \{b\}) = \delta(B'').$$

Sea $B := \langle B' \rangle \cap \langle B'' \rangle$. Note que $\delta(B' \cup B'') = \delta(B'/B'') + \delta(B'')$ y afirmamos que $\delta(B'/B'') \leq 0$.

Por el corolario 2.1.1

$$\delta(B' \cup B'') - \delta(B'') \leq \delta(B') - \delta(B)$$

y por definición $\delta(B'/B) = \delta(B' \cup B) - \delta(B) = \delta(B') - \delta(B)$. Por construcción primero y por hipótesis después se tiene que:

$$\delta(B') - \delta(B) = \partial(\{a\} \cup X) - \delta(B) = \partial(X) - \delta(B).$$

Sea $B_0 \subseteq_{fin} B$ tal que B_0 es base de B y $X \subseteq B_0$, ya que X es linealmente independiente dicha B_0 existe. Más aún, $\delta(B) = \delta(B_0)$. Como $X \subseteq B_0 \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{B}}$ entonces $\delta(B) \geq \partial(X)$. De donde $\delta(B'/B'') \leq 0$ y por ende $\delta(B' \cup B'') \leq \delta(B'')$.

Ahora bien $\{a,b\} \cup X \subseteq B' \cup B'' \subseteq_{fin} D$, asi que

$$\partial(X \cup \{a,b\}) \leq \delta(B' \cup B'') \leq \delta(B''),$$

lo último por el argumento anterior. Además $\delta(B'') = \partial(\{b\} \cup X) = \partial(X)$, la primera igualdad por como tomamos B'' y la segunda por hipótesis.

Por lo tanto $\partial(\{a,b\} \cup X) \leq \partial(X)$, con lo que queda probada la igualdad.

5. Análogo a 4..

□

El siguiente lema nos premitirá ver la relación que hay entre la dimensión y ser subestructura fuerte.

Lema 2.3.3. *Si* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{E}_{est,sch}$, $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$ *y* $X \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$, *entonces* $\partial_{\mathfrak{A}}(X) = \partial_{\mathfrak{B}}(X)$.

Demostración. $\boxed{\geq}$ Dado que $\mathfrak{A}$ es subestructura de $\mathfrak{B}$ en L y $E(x,y)$ le asocia a cada x un único y, tenemos que para todo $Z \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$, $\delta_{\mathfrak{A}}(Z) = \delta_{\mathfrak{B}}(Z)$. Además $D_{\mathfrak{A}} \subseteq D_{\mathfrak{B}}$ por lo cual es claro que:

$$\{\delta_{\mathfrak{A}}(X') | X \subseteq X' \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}\} \subseteq \{\delta_{\mathfrak{B}}(X') | X \subseteq X' \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{B}}\}.$$

De donde $\partial_{\mathfrak{B}}(X) \leq \partial_{\mathfrak{A}}(X)$.
$\boxed{\leq}$ Sea $Y \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{B}}$ tal que $\partial_{\mathfrak{B}}(X) = \delta_{\mathfrak{B}}(X \cup Y)$, el cual existe por lema 2.3.1 y donde $X \cap Y = \emptyset$. Considere a $\langle (X \cup Y) \cap D_{\mathfrak{A}} \rangle$ y sea $X \subseteq X_1 \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$ tal que

$$\langle (X \cup Y) \cap D_{\mathfrak{A}} \rangle = \langle X_1 \rangle.$$

Note que este existe al ser $X \cup Y$ finito.

Como $X \subseteq X_1$ es claro que:

$$\langle X \cup Y \rangle \subseteq \langle X_1 \cup Y \rangle$$

y como $\langle X_1 \rangle \subseteq \langle X \cup Y \rangle$, concluimos que:

$$\langle X \cup Y \rangle = \langle X_1 \cup Y \rangle.$$

De ahí que $lin(X \cup Y) = lin(X_1 \cup Y)$ por lo que:

$$lin(Y/X_1) = lin(Y \cup X_1) - lin(X_1) = lin(X \cup Y) - lin(X_1).$$

Dado que $lin(X_1) = lin((X \cup Y) \cap D_{\mathfrak{A}})$ y por modularidad de lin llegamos a que:

$$\begin{aligned} lin(X \cup Y) - lin(X_1) &= lin(X \cup Y) - lin((X \cup Y) \cap D_{\mathfrak{A}}) \\ &= lin(X \cup Y) + lin(X \cup Y \cup D_{\mathfrak{A}}) - lin(X \cup Y) - lin(D_{\mathfrak{A}}) \\ &= lin(X \cup Y \cup D_{\mathfrak{A}}) - lin(D_{\mathfrak{A}}). \end{aligned}$$

Como $X \subseteq D_{\mathfrak{A}}$ se tiene que $lin(X \cup Y \cup D_{\mathfrak{A}}) = lin(Y \cup D_{\mathfrak{A}})$. Por ende concluimos por definición de $lin(./.)$ que:

$$lin(Y/X_1) = lin(Y/D_{\mathfrak{A}}),$$

debido a que $tr(Y/.)$ es no creciente tenemos que $tr(Y \cup E(Y)/D_{\mathfrak{A}} \cup E(D_{\mathfrak{A}})) \leq tr(Y \cup E(Y)/X_1 \cup E(X_1))$. Por lo que por el lema 2.1.1 nos queda que:

$$\delta_{\mathfrak{B}}(Y/X_1) \geq \delta_{\mathfrak{B}}(Y/D_{\mathfrak{A}})$$

pero como $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$ por la condición 2. llegamos a que $\delta_{\mathfrak{B}}(Y/D_{\mathfrak{A}}) \geq 0$.

Por otro lado, como tenemos que $\langle X_1 \cup Y \rangle = \langle X \cup Y \rangle$ se tiene que $\delta_{\mathfrak{B}}(X \cup Y) = \delta_{\mathfrak{B}}(X_1 \cup Y)$. Y despejando de la definición de $\delta_{\mathfrak{B}}(Y/X_1)$ y dado que hemos demostrado que $\delta_{\mathfrak{B}}(Y/X_1) \geq 0$ llegamos a que:

$$\delta_{\mathfrak{B}}(Y \cup X_1) = \delta_{\mathfrak{B}}(Y/X_1) + \delta_{\mathfrak{B}}(X_1) \geq \delta_{\mathfrak{B}}(X_1).$$

Por lo que por la observación 1. $\delta_{\mathfrak{B}}(X_1) = \delta_{\mathfrak{A}}(X_1)$ y como ∂ por definición es el mínimo $\delta_{\mathfrak{A}}(X_1) \geq \partial_{\mathfrak{A}}(X)$. Por ende $\partial_{\mathfrak{A}}(X) \leq \partial_{\mathfrak{B}}(X)$. □

Para que tenga sentido la construcción de la predimensión y de la dimensión debemos definir una geometría combinatoria, que será lo siguiente que realizaremos.

Definición 2.3.2. Dada $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est,sch}$ definimos el operador $Ecl_{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ de la siguiente manera:

1. Si $X \subseteq_{fin} A$ entonces $Ecl_{\mathfrak{A}}(X) = \{b \in A | \partial(X \cup \{b\}) = \partial(X)\}$.
2. Si $X \subseteq A$ es infinito entonces $Ecl_{\mathfrak{A}}(X) = \bigcup_{Y \subseteq_{fin} X} Ecl_{\mathfrak{A}}(Y)$.[7]

Intuitivamente dados $X \subseteq D$ y $b \in D$, $b \in Ecl(X)$ si b no aumenta la *complejidad exponencial-algebraica* de $E(X) \cup X$. Dicho concepto se profundiza en la sección 5.1.

Un hecho fino y sumamente importante para poder escribir la axiomatización de los campos pseudo-exponenciales en $L_{\omega_1,\omega}(Q)$ y para probar que la clase de campos pseudo-exponenciales es cuasiminimal excelente, es que la relación cerradura sea definible en nuestro lenguaje. Recordemos qué entendemos porque una relación sea definible en $L_{\omega_1,\omega}$.

Definición 2.3.3. Dado $\mathfrak{A}$ un modelo y una relación $n-$aria R sobre A, decimos que R es definible en $L_{\omega_1,\omega}$ si existe una fórmula ϕ_R en $L_{\omega_1,\omega}$ con n variables libres tal que

$$(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \phi_R[a_1, ..., a_n]$$

Dado que la cerradura para conjuntos infinitos está definida en base a la cerradura para conjuntos finitos sólo es necesario ver cómo se define en estos. Para ello daremos una fórmula distinta para cada $n \in \omega$, la cual denotaremos por ϕ^n_{Ecl}.

Específicamente, dados $X = \{x_1, ..., x_n\}$ y $y \in A$ buscamos una fórmula ϕ^n_{Ecl} con $n+1$ variables libres tal que:

$$y \in Ecl(X) \leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \phi^n_{Ecl}[y, x_1, ..., x_n].$$

El primer paso consistirá en estudiar la expresabilidad de la predimensión en nuestro lenguaje.

[7] El operador define una pregeometría en $\mathfrak{A}$ (ver capítulo 4 para la definición y el capítulo 5 para la prueba que $\langle \mathfrak{A}, Ecl \rangle$ es una pregeometría).

Proposición 2.3.1. *Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est,sch}$. Para todo $n, m \in \omega$ existe una fórmula $\phi^m_{\delta,n}(\bar{y})$ con n variables libres tal que para todo $B \subseteq_{fin} A$ con $B = \{b_1, ..., b_n\}$ se satisface que :*

$$\delta(B) = m \textit{ sii } \mathfrak{A} \vDash \phi^m_{\delta,n}[b_1, ..., b_n].$$

Demostración. Supongamos que $B = \{b_1, ..., b_n\}$ y $\delta(B) = m$. Lo que haremos será dar una fórmula que afirme que $tr(B \cup E(B)) = k$ y otra que nos afirme que $lin(B) = k$ y al final combinaremos ambas para obtener lo deseado.

Note que $tr(B \cup E(B)) = k$ si y solo si existen k elementos algebraicamente independientes en $B \cup E(B)$ y que cualesquiera $r > k$ elementos son necesariamente algebraicamente dependientes. Escribamos ello en $L_{\omega_1,\omega}$.

$$\phi^k_{tr,n}(\bar{z}) := \exists y_1 ... \exists y_k \Big((\wedge_{i \neq j} y_i \neq y_j) \wedge \big(\textstyle\bigwedge_{i=1}^k \vee_{j=1}^n (y_i = z_j) \vee E(z_j, y_i)\big) \wedge \big(\bigwedge_{l \in \omega} \neg V_{k,l}(y_1, ..., y_k)\big) \wedge$$
$$\Big(\textstyle\bigwedge_{i=k+1}^n \big(\forall w_1 ... \forall w_i \big((\wedge_{i \neq j} w_i \neq w_j) \wedge (\bigwedge_{i=1}^k \vee_{j=1}^n ((w_i = z_j) \vee E(z_j, w_i) \rightarrow \bigvee_{l \in \omega} V_{i,l}(w_1, ..., w_i)))\big)\Big)\Big).$$

Por otro lado, $lin(B) = k$ si y sólo si existen k elementos linealmente independientes y no más. La fórmula es análoga y es posible escribirla porque podemos cuantificar sobre $\mathbb{Z}$, dado que $(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} v = n(1)) \vee (\bigvee_{n \in \mathbb{N}} v = n(-1))$ se encuentra en nuestro lenguaje. A dicha fórmula la denotaremos por $\phi^k_{lin,n}(\bar{z})$.

Ahora bien, note que $\delta(B) = m$ si y sólo si $tr(B \cup E(B)) = lin(B) + m$ por lo que escribiremos todas las formas posibles de obtener ello utilizando $\phi^k_{tr,n}$ y $\phi^k_{lin,n}$. Procedamos a escribirlo en $L_{\omega_1,\omega}$.

$$\phi^k_{\delta,n}(\bar{z}) := \textstyle\bigvee_{i=m}^n (\phi^i_{tr,n}(\bar{z}) \leftrightarrow \phi^{i-m}_{lin,n}(\bar{z})).$$

Por construcción es claro que cumple lo deseado, es decir,

$$\delta(B) = m \text{ sii } \mathfrak{A} \vDash \phi^m_{\delta,n}[b_1, ..., b_n].$$

□

Lema 2.3.4. *Dados $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est,sch}$ y $B, C \subseteq_{fin} D$ tales que $B = \{b_1, ..., b_n\}$ y $C = \{c_1, ..., c_m\}$ entonces existe una fórmula $\phi^{n,m}_{\delta,\leq}$ con $n + m$ variables libres tal que:*

$$\delta(B) \leq \delta(C) \textit{ sii } \mathfrak{A} \vDash \phi^{n,m}_{\delta,\leq}[b_1, ..., b_n, c_1, ..., c_m].$$

Demostración. La idea es usar $\phi^i_{\delta,n}$ del lema anterior e ir forzando a $\delta(C)$ a ser mayor a $\delta(B)$ y en caso de que ello no sea posible, que se da cuando $n > m$, lo que hacemos es forzar a $\delta(B)$ a no tomar esos valores. La fórmula en $L_{\omega_1,\omega}$ es la siguiente.

$$\phi^{n,m}_{\delta,\leq}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) := \Big(\phi^0_{\delta,n}(x_1, ..., x_n) \vee \textstyle\bigvee_{i=1}^m \Big(\phi^i_{\delta,n}(x_1, ..., x_n) \rightarrow$$
$$\big(\textstyle\bigvee_{j=i}^m \phi^j_{\delta,m}(y_1, ..., y_n)\big)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i=m+1}^n \neg(\phi^i_{\delta,n}(x_1, ..., x_n))\Big)\Big).$$

Afirmamos que

$$\delta(B) \leq \delta(C) \text{ sii } \mathfrak{A} \vDash \phi^{n,m}_{\delta,\leq}[b_1, ..., b_n, c_1, ..., c_m].$$

$\boxed{\rightarrow}$ Supongamos que $\delta(B) \leq \delta(C)$. Como $\delta(C) \leq m$, tenemos que:

$$\mathfrak{A} \vDash \bigwedge_{i=m+1}^{n} \neg(\phi^{i}_{\delta,n}(b_1, ..., b_n)).$$

Por lo tanto, $\delta(B) = r$ para algún $r \leq m$. El primer caso es que $r = 0$ y en dicho caso $\mathfrak{A}$ satisface la disyunción.

Si $r \neq 0$. Supongamos que $k = \delta(C) \geq r$, de ahí que:

$$\mathfrak{A} \vDash \phi^{r}_{\delta,n}(b_1, ..., b_n) \wedge \phi^{k}_{\delta,m}(c_1, ..., c_n),$$

lo cual implica que:

$$\mathfrak{A} \vDash \phi^{r}_{\delta,n}(b_1, ..., b_n) \rightarrow \bigvee_{i=r}^{m} \phi^{i}_{\delta,m}(c_1, ..., c_n).$$

Por ende, tenemos que:

$$\mathfrak{A} \vDash \phi^{n,m}_{\delta,\leq}[b_1, ..., b_n, c_1, ..., c_m].$$

$\boxed{\leftarrow}$ Primero note que por la segunda parte de la fórmula tenemos que $\delta(B) \leq m$ y dado a que tenemos la propiedad de Schanuel podemos concluir que $\delta(B) = p$ para $p \in \{0, ..., m\}$. En dichos casos obligamos a $\delta(C)$ a ser mayor. En el caso del cero no la obligamos, pero es claro que se cumple ya que contamos con la propiedad de Schanuel.

Por lo tanto, $\delta(B) \leq \delta(C)$. □

En segundo lugar es necesario recordar tres hechos triviales:

- $y \in Ecl(X)$ sii $\partial(X) = \partial(X \cup \{y\})$ sii $min\{\delta(X')|X \subseteq X' \subseteq_{fin} D\} = min\{\delta(X'')|X \cup \{y\} \subseteq X'' \subseteq_{fin} D\}$.
- $\{\delta(X'')|X \cup \{y\} \subseteq X'' \subseteq_{fin} D\} \subseteq \{\delta(X')|X \subseteq X' \subseteq_{fin} D\}$.
- Si $N \subseteq M$ entonces $\forall m \in M\ \exists n \in N(n \leq m)$ sii $min_{\leq}(M) = min_{\leq}(N)$.

Proposición 2.3.2. *La cerradura $Ecl_{\mathfrak{A}}$ es definible en $L_{\omega_1,\omega}$.*

Demostración. Por todas las reducciones hechas antes de la proposición, ello se reduce a encontrar una fórmula φ^{n}_{Ecl} para toda $n \in \omega$. Definamos:

$$\phi^{n}_{Ecl}(y, x_1, ..., x_n) := \bigwedge_{l=0}^{\infty} \forall z_1 ... \forall z_l \Big(\exists v_1 ... \exists v_l \big(\bigwedge_{i \in \{1,...,l\}} E(z_i, v_i) \big) \rightarrow$$
$$\Big(\bigvee_{j=0}^{\infty} \exists w_1 ... w_j \big(\exists v'_1 ... \exists v'_j (\bigwedge_{i \in \{1,...,j\}} E(w_i, v'_i)) \big) \wedge \big(\delta(\{x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_l\}) \geq$$
$$\delta(\{x_1, ..., x_n, y, w_1, ..., w_j\}) \big) \Big) \Big).$$

Note que por el lema 2.3.5, la última parte se puede escribir en $L_{\omega_1,\omega}$.

La razón por la cual ello define el hecho que $y \in Ecl(X)$ es por los tres hechos triviales mencionados anteriormente. Primero observe que $y \in Ecl(X)$ sii $\partial(\{y\} \cup X) = \partial(X)$ sii por el hecho 1 $min\{\delta(X')|X \subseteq X' \subseteq_{fin} D\} = min\{\delta(X'')|X \cup \{y\} \subseteq X'' \subseteq_{fin} D\}$.

Ahora bien, lo que nos dice la fórmula es que dado $Z \subseteq_{fin} D$ existe un $W \subseteq_{fin} D$ tal que $\delta(X \cup Z) \geq \delta(X \cup Z \cup \{y\})$. En otras palabras dado $m \in \{\delta(X')|X \subseteq X' \subseteq_{fin} D\}$ existe $n \in \{\delta(X'')|X \cup \{y\} \subseteq X'' \subseteq_{fin} D\}$ tal que $n \leq m$.

Por lo tanto, debido a que $\{\delta(X'')|X \cup \{y\} \subseteq X'' \subseteq_{fin} D\} \subseteq \{\delta(X')|X \subseteq X' \subseteq_{fin} D\}$ y por el hecho 3 se sigue que $min\{\delta(X')|X \subseteq X' \subseteq_{fin} D\} = min\{\delta(X'')|X \cup \{y\} \subseteq X'' \subseteq_{fin} D\}$ o equivalentemente que $\partial(\{y\} \cup X) = \partial(X)$.

$\square$

Ahora que hemos visto que la cerradura es definible podemos pasar a nuestro cuarto axioma que es en el cual utilizaremos el cuantificador Q, el cual afirma que si ϕ es $Qx\alpha(x)$, donde $\alpha(x)$ es una fórmula, entonces

$$\mathfrak{A} \vDash \phi \text{ si } \mid \{a \in A \mid \mathfrak{A} \vDash \alpha[a]\} \mid \geq \aleph_1,$$

es decir, $\mathfrak{A}$ satisface $Qx\alpha(x)$, si el conjunto de elemntos de A que satisfacen $\alpha(x)$ no es numerable.

Al cuarto axioma lo llamaremos cerradura numerable y afirma que dados $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est,sch}$ y $X \subseteq_{fin} A$, se tiene que $|Ecl(X)| \leq \aleph_0$.

IV Cerradura numerable (CN).

$$\bigwedge_{n\in\omega} \forall x_1 ... \forall x_n \neg Qy \phi^n_{Ecl}(y, x_1, ..., x_n)$$

Note que el enunciado anterior nos dice precisamente que la cerradura de todo conjunto finito es numerable

Un hecho que nos gustaría destacar respecto a la cerradura numerable es que en [31] Zilber demuestra que los complejos satisfacen dicho axioma.

A las estructuras que satisfacen los axiomas I, II, III y IV las denotaremos por $\mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$. Cabe mencionar que veremos en la sección 5.2 que dicha clase de estructuras es no vacía.

2.4. Cerradura exponencial-algebraica fuerte

En esta sección se introducirá el último de los axiomas, el cual llamaremos *cerradura exponencial-algebraica fuerte*, para ello será necesario dar un gran número de definiciones e introducir cierta notación. A diferencia de otras secciones, las nociones introducidas en esta sección no serán trabajadas a profundidad hasta el siguiente capítulo dado que requieren de un cierto conocimiento de álgebra que no hemos tocado hasta este momento y más bien el trabajo estará enfocado en escribir el axioma en $L_{\omega_1,\omega}$ que es mucho más laborioso que en casos pasados.

2.4.1. Axioma

Primero introduciremos tres definiciones de geometría algebraica en las cuales $\mathfrak{A}$ será un campo algebraicamente cerrado de característica cero.

Definición 2.4.1. Sean $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una variedad algebraica y $\mathfrak{C}$ subcampo de $\mathfrak{A}$, diremos que V es definible sobre $\mathfrak{C}$, si existe un subconjunto de polinomios con coeficientes en C tal que determina a V.

En el lenguaje de los preliminares, sección 1.3.1, ello sería lo mismo a decir que $\mathbb{V}_{\mathfrak{A}}(\mathbb{I}_{\mathfrak{C}}(V)) = \mathbb{V}_{\mathfrak{A}}(\mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V))$.

Definición 2.4.2. Sean $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una variedad algebraica, $\mathfrak{C}$ subcampo de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ una extensión algebraicamente cerrada como campo de $\mathfrak{A}$ (posiblemente con $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$). Decimos que $(\bar{a}, \bar{b}) \in B^n \times (B^*)^n$ es **genérico** en V sobre $\mathfrak{C}$ si $\mathbb{I}_{\mathfrak{C}}(\bar{a}, \bar{b}) = \mathbb{I}_{\mathfrak{C}}(V)$.

Observación 3.

- *Si $(\bar{a}, \bar{b})$ es genérico en V sobre $\mathfrak{A}$ entonces $(\bar{a}, \bar{b})$ no pertenece a ninguna subvariedad propia de V.*
- *Si $(\bar{a}, \bar{b})$ es genérico en V sobre $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$ entonces $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{V}_{\mathfrak{B}}(\mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V))$.*
- *Si $(\bar{a}, \bar{b})$ es genérico en V sobre $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C} \subsetneq \mathfrak{A}$, no es necesariamente cierta la afirmación anterior. Lo que sí necesariamente sucede es que $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{V}_{\mathfrak{B}}(\mathbb{I}_{\mathfrak{C}}(V))$.*
- *Si $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$ y V no es un punto, note que si $(\bar{a}, \bar{b})$ es genérico en V sobre $\mathfrak{A}$ entonces $(\bar{a}, \bar{b})$ necesariamente estará en un supracampo de $\mathfrak{A}$, al ser $\mathfrak{A}$ algebraicamente cerrado.*

A continuación daremos algunos ejemplos para que se familiarice el lector con la definición.

Ejemplos.

1. Sean $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathbb{C}$ y $V = \{(0, 1)\} = \mathbb{V}(\{x = 0, y = 1\}) \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Es claro que $(0, 1)$ es genérico en V sobre $\mathbb{C}$.
2. Más aún, simpre que $V = \{a\}$ se tiene que a es genérico sobre cualquier subcampo $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{A}$.
3. Sean $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathbb{C}$, $\mathfrak{C} = \mathbb{Q}$ y $V = \{(\pi, 2\pi)\} = \mathbb{V}(\{x = \pi, y = 2\pi\}) \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Note que $(e, 2e)$ es genérico en V sobre $\mathbb{Q}$ pues al ser π y e trascendentales $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}((e, 2e)) = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(V)$.
4. Sean $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} = \mathbb{C}$ e $I \subseteq \mathbb{C}[x, y]$ un ideal primo tal que $\mathbb{V}(I) \cap \{(a, 0) | a \in \mathbb{C}\} = \emptyset$ y sea $\mathfrak{B}$ la cerradura del campo de fracciones de $\mathbb{C}/I$, afirmamos que $(x+I, y+I)$ es genérico en V sobre $\mathbb{C}$. La prueba de ello en el caso general está dada en la proposición 3.2.1.

El segundo y tercer ejemplo muestran dos aspectos elementales de la definición. El segundo, que un punto a es genérico sobre V en el campo $\mathfrak{C}$ si no podemos diferenciarlos desde $\mathfrak{C}$. El tercero, que a es genérico si es solución de las ecuaciones que definen a V en $\mathfrak{C}$.

Definición 2.4.3. Sean $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, definimos el locus $(\bar{a}, \bar{b}) \in B^n \times (B^*)^n$ en $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{C}$ como la variedad más pequeña contenida en $\mathfrak{A}$ cuyo ideal contiene a $\mathbb{I}_{\mathfrak{C}}((\bar{a}, \bar{b}))$, lo denotaremos por $Loc_{\mathfrak{A},\mathfrak{C}}(\bar{a}, \bar{b})$.

Para simplificar la notación, en caso de que $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$ lo denotaremos por $Loc_{\mathfrak{A}}(\bar{a}, \bar{b})$.

Con ello en mente pasemos a la primera de las definiciones importantes de esta sección y para que tenga sentido sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$.

Definición 2.4.4. Sean $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una variedad algebraica irreducible, $\mathfrak{B}$ una extensión algebraicamente cerrada como campo de $\mathfrak{A}$ (posiblemente con $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$) y $(\bar{a}, \bar{b}) \in B^n \times (B^*)^n$ cualquier $n-$ada genérica en V sobre $\mathfrak{A}$. Diremos que V es **libre**:

1. (libre de depedencia aditiva) Si las a_i no satisfacen ninguna ecuación de la forma $\Sigma_{i=1}^{l} m_i a_i = a$ con algún $m_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y $a \in D_{\mathfrak{A}}$.
2. (libre de dependencia multiplicativa) Si los b_i no satisfacen ninguna ecuación de la forma $\Pi_i^l b_i^{n_i} = b$ con algún $n_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y $b \in E_{\mathfrak{A}}(D_{\mathfrak{A}})$.

Observación 4. ▪ *Ninguna variedad puede ser libre por vacuidad, dado que siempre es posible encontrar una extensión $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ donde viva un punto $(\bar{a}, \bar{b})$ genérico en V sobre $\mathfrak{A}$. Dicho hecho será demostrado en el siguiente capítulo pero es importante tenerlo en mente.*

Antes de dar algunos ejemplos es pertinente demostrar un par de proposiciones que nos permitiran determinar más facilmente si una variedad es o no es libre.

Proposición 2.4.1. *Dadas $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$ y $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ variedad irreducible. V es libre de dependencia aditiva sii para toda $\bar{m} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{\bar{0}\}$ y $a \in D$ se satisface que $\Sigma^n_{i=1} m_i x_i - a \notin \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V) \subseteq A[\bar{x}, \bar{y}]$.*

Demostración. $\boxed{\rightarrow}$ Sea V libre de dependencia aditiva y $(\bar{a}, \bar{b})$ genérico en V sobre $\mathfrak{A}$ entonces dados $a \in D_{\mathfrak{A}}$, $\bar{m} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{\bar{0}\}$ y $p(\bar{x}) = \Sigma^n_{i=1} m_i x_i - a$; al ser V libre de dependencia aditiva se satisface que $p(\bar{a}) \neq 0$. Como $\mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V) = \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}, \bar{b})$, se tiene que $\Sigma^n_{i=1} m_i x_i - a \notin \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V)$.

$\boxed{\leftarrow}$ Procedamos por contradicción. Sea $(\bar{a}, \bar{b})$ genérico en V sobre $\mathfrak{A}$ y supongamos que hay $\bar{m} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{\bar{0}\}$ y $a \in D_{\mathfrak{A}}$ tal que $\Sigma^n_{i=1} m_i a_i = a$; entonces $p(\bar{x}) = \Sigma^n_{i=1} m_i x_i - a \in \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}((\bar{a}, \bar{b}))$. Como por hipótesis tenemos que:

$$\mathbb{I}_{\mathfrak{A}}((\bar{a}, \bar{b})) = \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V),$$

entonces $p(\bar{x}) \in \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V)$, lo cual contradice el hecho de que para toda $\bar{m} \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ y $a \in D$ se satisface que $\Sigma^n_{i=1} m_i x_i - a \notin \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V)$.

Por lo tanto, no existe tal combinación, es decir, V es libre de dependencia aditiva.

□

Proposición 2.4.2. *Dadas $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$ y $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ variedad irreducible. V es libre de dependencia multiplicativa sii para toda $\bar{m} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{\bar{0}\}$ y $b \in A^*$ $\Pi_{m_i \geq 0} y_i^{m_i} - b \Pi_{m_i \leq 0} y_i^{-m_i} \notin \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V) \subseteq A[\bar{x}, \bar{y}]$.*

Demostración. La prueba es análoga a la de la proposición 2.4.1. □

Ahora bien, de manera análoga a como se hizo con la definición pasada, daremos algunos ejemplos para familiarizarnos con la definición.

Ejemplos.

1. Sean $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ y $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Observe que $\mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V) = \{0\}$. Por lo que es claro que para todo $m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ y $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $mx - z \notin \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V)$, por lo que V es libre de dependencia aditiva.

   Además si $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ y $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $y^m - z \notin \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V)$ y si $-m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ se tiene que $zy^{-m} \notin \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V)$, por lo que V es libre de dependencia multiplicativa.

   Por lo tanto, V es libre.

2. Más aún, si $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ y $V = A^n \times (A^*)^n$ entonces V es libre. La prueba de ello es análogo a lo hecho anteriormente, ya que $\mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V) = \{0\}$.

3. Sean $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ y $V = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(x - 1) \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, es decir, $V = \{1\} \times \mathbb{C}^*$.

   Supongamos en vistas de obtener una contradicción que existe un $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ y $z \in \mathbb{C}^*$ tal que $y^m - z \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}(V)$. Como $V = \{1\} \times \mathbb{C}^*$ ello implicaría que $((1 + z)^{1/m})^m - z = 0$ pero $((1 + z)^{1/m})^m - z = 1$, lo cual es una contradicción. Trivialmente dados $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ y $z \in \mathbb{C}^*$ se tiene que $zy^m \notin \mathbb{I}_{\mathbb{C}}(V)$.

   Por lo tanto, V es libre de dependencia multiplicativa pero debido a que $x - 1 \in \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V)$, no es libre de dependencia aditiva.

4. Sean $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ y $V = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(y^3 - 1) \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Por un razonamiento análogo al anterior se tiene que V es libre de dependencia aditiva, pero debido a que $y^3 - 1 \in \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V)$; V no es libre de dependencia multiplicativa.

Observe que los últimos dos ejemplos nos dan variedades que no son libres. A continuación daremos un ejemplo más elaborado de una variedad que no es libre de dependencia aditiva y un ejemplo de una variedad que no es libre ni de dependencia aditiva ni de dependencia multiplicativa.

Ejemplos. 1. Sean $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ y $V = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(\{x_1 - 3/2x_2\}) \subseteq \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2$. Observe que $2x_1 - 3x_2 \in \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(\mathbb{C})$, por lo tanto V no es libre de dependencia aditiva; por lo que V no es libre.

2. Sean $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ y $V = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(4x - \pi, y^2 - e) \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Como $4x - \pi, y^2 - e \in \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V)$ se tiene que V no es libre de dependencia aditiva y no es libre de dependencia multiplicativa; claramente V tampoco es libre.

De manera análoga se tiene la definición relativa a un subcampo de $\mathfrak{A}$.

Definición 2.4.5. Dado $\mathfrak{C}$ subcampo de $\mathfrak{A}$ tal que $E_{\mathfrak{C}} = E_{\mathfrak{A}} \restriction_X$ para todo $X \subseteq C$[8] y $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ variedad algebraica irreducible tal que $(\bar{a}, \bar{b})$ (posiblemente en una extensión de $\mathfrak{A}$) es genérico en V sobre $\mathfrak{C}$. Diremos que V es **libre respecto a** $\mathfrak{C}$:

1. (libre de depedencia aditiva) Si las a_i no satisfacen ninguna ecuación de la forma $\Sigma_{i=1}^{l} m_i a_i = a$ con algún $m_i \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ y $a \in D_{\mathfrak{C}}$.

2. (libre de dependencia multiplicativa) Si los b_i no satisfacen ninguna ecuación de la forma $\Pi_i^l b_i^{n_i} = b$ con algún $n_i \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ y $b \in E_{\mathfrak{C}}(D_{\mathfrak{C}})$.

Antes de relativizar la definición a subconjuntos es pertinete dar una última definición.

Definición 2.4.6. Dados $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est,sch}^{cn}$ y $X \subseteq A$ definimos $< X >_{\mathfrak{A}}$ como el campo exponencial tal que:

- $D_{<X>_{\mathfrak{A}}} = \langle X \rangle$ y $E_{<X>_{\mathfrak{A}}} = E_{\mathfrak{A}} \restriction_{D_{<X>_{\mathfrak{A}}}}$.
- Cuyo campo subyacente es $\mathbb{Q}(D_{<X>_{\mathfrak{A}}} \cup E_{<X>_{\mathfrak{A}}}(D_{<X>_{\mathfrak{A}}}))$.

Dados $X \subseteq A$ y $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ variedad algebraica irreducible diremos que V es libre respecto a X si es libre respecto a $< X >_{\mathfrak{A}}$.

Es momento de introducir un poco de notación, en vistas a la introducción de una nueva definición. Dados $(\bar{a}, \bar{b}) \in A^n \times (A^*)^n$ y $\bar{m} \in \mathbb{Z}$ definamos:

- $(a_1, ..., a_n) \bullet (m_1, ..., m_n) := \Sigma_{i=1}^{n} m_i a_i$
- $(b_1, ..., b_n) \star (m_1, ..., m_n) := \Pi_{i=1}^{n} b_i^{m_i}$

Ahora bien, dada $M \in Mat_{n \times n}(\mathbb{Z})$ de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & ... & m_{1,n} \\ ... & ... & ... \\ m_{n,1} & ... & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

[8] Observe que $E_{\mathfrak{C}} : C \to C$ por lo que $im E_{\mathfrak{A}} \restriction_X \subseteq C$.

Definamos $[M](\bar{a}, \bar{b})$ como sigue:

$$[\begin{pmatrix} m_{1,1} & ... & m_{1,n} \\ ... & ... & ... \\ m_{n,1} & ... & m_{n,n} \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \\ b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \bar{a} \bullet (m_{1,1}, ..., m_{1,n}) \\ ... \\ \bar{a} \bullet (m_{n,1}, ..., m_{n,n}) \\ \bar{b} \star (m_{1,1}, ..., m_{1,n}) \\ ... \\ \bar{b} \star (m_{n,1}, ..., m_{n,n}) \end{pmatrix}$$

Es decir, $[M]$ actúa como una función lineal en el grupo aditivo de $\mathfrak{A}$ y como una función multiplicativa en el grupo multiplicativo $\mathfrak{A}$. Lo primero que hay que notar es que si V es variedad algebraica entonces V es un conjunto constructible[9] tal que:

$$dim([M]V) = dim(\overline{[M]V}).$$

Lo que quiere decir es que $[M]V$ dista de ser una variedad por un conjunto de dimensón menor. Debido a ello, vamos a suponer en lo que sigue que en realidad $[M]V$ es una variedad, ya que lo que nos interesará en este texto será la dimensión de $[M]V$ y no precisamente el conjunto.

Recordemos que el rango de una matriz $M \in Mat_{n\times n}(\mathbb{Z})$ es el máximo número de columnas (renglones) linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ y nosotros lo denotaremos por $rg(M)$. Usaremos la notación usual $M\bar{a}$ para referirnos al producto de un vector por una matriz.

Con dichas nociones estamos listos para dar la segunda definición importante de esta sección.

Definición 2.4.7. Sea $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una variedad, diremos que V es **rotunda** si para toda $M \in Mat_{n\times n}(\mathbb{Z})$ se satisface que:

$$dim([M]V) \geq rg(M).$$

Como ha ocurrido en casos pasados es momento de dar algunos ejemplos.

Ejemplos.

1. Sean $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ y $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Si $M = (0)$ entonces $[M]V = (0, 1)$ y por ende:

   $$dim([M]V) = 0 \geq 0 = rg(M)$$

   Si $M \neq (0)$ entonces $[M]V = V$ pues al ser $\mathbb{C}$ algebraicamente cerrado contiene la raíz $n-$ésima de todos sus elementos. Por ende:

   $$dim(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*) = 2 \geq 1 = rg(M).$$

   Por lo tanto, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ es rotunda.

2. Más aún, dado $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}$ se tiene que $V = A^n \times (A^*)^n$ es rotunda.

3. Sean $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ y $V = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(x^2 + (y-2)^2 - 1) \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Note que V es precisamente el círculo con radio 1 y centro en $(0, 2)$. Si $M = (0)$ entonces es claro que $dim(M) = 0 = rg(M)$.

   Ahora bien, si $M \neq (0)$ entonces el resultado de $[M]V$ es una especie de elipse, donde la parte de abajo es más ancha que la de arriba, por lo que la $dim([M]V) = 1$. Dado que $rg(M) = 1$, se tiene que:

   $$dim([M]V) = 1 \geq 1 = rg(M).$$

   Por lo tanto, V es rotunda.

[9] El argumento se sigue de que hay eliminación de cuantificadores en los campos algebraicamente cerrados.

De nuevo para justificar la definición daremos un ejemplo de una variedad que no es rotunda.

Ejemplos. 1. Sean $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ y $V = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(x-1, y-1)$. Considere $M = (3) \in Mat_{1\times 1}(\mathbb{Z})$, claramente $[M]V = (3, 1)$, $dim([M]V) = 0$ y $rg(M) = 1$. Por lo que:

$$rg(M) = 1 > 0 = dim([M]V).$$

Por lo tanto, V no es rotunda.

2. Sea $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ y $V = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}(3x_1 + x_2, y_1 - 1, y_2 - 1)$. Note que:

$$V = Nul(M) \times (1, 1),$$

donde M es la siguiente matriz:

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, el $rg(M) = 1$ y

$$[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}]V = \{(0, 0, 1, 1)\}.$$

Por lo que:

$$rg(M) = 1 > 0 = dim([M]V).$$

Por lo tanto, V no es rotunda.

Con ello estamos listos para enunciar el axioma V en español.

V Cerradura exponencial-algebraica fuerte.

Sea $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una variedad definida sobre $\mathfrak{A}$ tal que V es irreducible, libre, rotunda y $dim(V) = n$ entonces dado $B \subseteq_{fin} A$ existe $(\bar{c}, E_{\mathfrak{A}}(\bar{c})) \in A^n \times (A^*)^n$ que es genérico en V sobre $< B >_{\mathfrak{A}}$.

Ahora bien, como puede ver el lector, la afirmación es bastante compleja, pero lo que queremos con ella es agregar soluciones a sistemas de polinomios. El hecho de que le pidamos a las variedades que sean irreducibles, libres y rotundas es para que no agreguemos soluciones de más, que hagan falsa la conjetura de Schanuel.

Por otro lado, esa complejidad implica que la escritura del axioma en $L_{\omega_1,\omega}$ será compleja por lo que la haremos en una sección aparte.

2.4.2. Escritura formal en $L_{\omega_1,\omega}$

Lo primero que haremos en esta sección es demostrar que tanto la propiedad de ser irreducible como la propiedad de tener dimensión n para variedades irreducibles son definibles en los campos algebraicamente cerrados de característica cero.

Recuerde que una variedad $V \subseteq A^n$ es reducible sii existen W y Y tales que $V = W \cup Y$ y $Y, W \subsetneq V$. Lo cual a su vez es equivalente a que existan $p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_m \in A[\bar{x}]$ tales que la unión de ceros de $p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_m$ sean V y que los ceros de $p_1, ..., p_n$ y $q_1, ..., q_m$ no se contengan. Una variedad es irreducible sii no es reducible.

Por lo tanto, lo que se hará, será demostrar que ser reducible es definible para toda n y con ello concluiremos que ser irreducible también lo es. Por razones de exposición, primero demostremos que ser reducible es definible para $n = 1$ y posteriormente realizaremos el caso general.

Lema 2.4.1. *Ser reducible es fuertemente definible para $n = 1$ en los campos algebraicamente cerrados.*

Demostración. Sean $L' = L \cup \{U\}$, donde U es una relación $1-$aria, y $\mathfrak{A}$ un campo algebraicamente cerrado. Lo que haremos será definir una fórmula ϕ_1 que cumpla con la equivalencia dada de la definición de reducibilidad.

Antes de ello, para simplificar la escritura, defanimos la fórmula $\alpha_{x_{s_1},...,x_{s_k}}(w)$ para toda $k \in \omega$ de la siguiente manera:

$$\alpha_{x_{s_1},...,x_{s_k}}(w) :=$$

$$\begin{array}{ll} (x^1_{s_1} w^{s_1} + ... + x^1_0 = 0 & \wedge \\ \quad ...... & \wedge \\ x^k_{s_k} w^{s_k} + ... + x^k_0 = 0) & \end{array}$$

Donde los $x^i_{s_i-j}$ son los coeficientes y w es la incógnita elevada a las distintas potencias.

Ahora sí con ello en mente, definamos a ϕ_1 de la siguiente manera:

$$\bigvee_{n=2}^{\infty} \Bigg(\vee_{l+r=n;\, l,r\geq 1} \Big(\bigvee_{m=2}^{\infty} \Big(\vee_{\Sigma_{i=1}^{l} k_i + \Sigma_{i=1}^{r} p_i = m;\, k_i, p_i \geq 0\ \forall i}$$
$$\Big(\exists x^1_{k_1} ... \exists x^1_0 ... \exists x^l_{k_l} ... \exists x^l_0 \exists y^1_{p_1} ... \exists y^1_0 ... \exists y^r_{p_r} ... \exists y^r_0 \big((\forall w (\alpha_{x_{k_1},...,x_{k_l}}(w) \to U(w)) \wedge (\forall z (\alpha_{y_{p_1},...,y_{p_r}}(z) \to U(z))) \wedge (\forall f (U(f) \to (\alpha_{y_{p_1},...,y_{p_r}}(f) \vee \alpha_{x_{k_1},...,x_{k_l}}(f)))) \wedge (\exists g (\alpha_{y_{p_1},...,y_{p_r}}(g) \wedge \neg \alpha_{x_{k_1},...,x_{k_l}}(g))) \wedge$$
$$(\exists h (\neg \alpha_{y_{p_1},...,y_{p_r}}(h) \wedge \alpha_{x_{k_1},...,x_{k_l}}(h)))) \big) \Big) \Big) \Big) \Bigg)$$

La fórmula parece muy complicada pero lo que se hizo fue "cuantificar"sobre todas las posibles biparticiones finitas de polinomios (ello se hace con las dos primeras disjunciones) y luego "cuantificar"sobre todos los posibles grados de los polinomios en dichas biparticiones (ello se hace con las dos últimas disjunciones). Después de ello, cuantificamos sobre los coeficientes y las fórmulas subsecuentes nos dicen lo siguiente:

- La primera y segunda nos dicen que las soluciones de nuestros polinomios se encuentran contenidos en el conjunto original.
- La tercera que nuestro conjunto original se encuentra contenido en los ceros de ambos elementos de la partición.
- La cuarta y quinta fórmula que los ceros de unos no contienen los ceros de los otros.

Por ende, dado $V \subseteq A$ tenemos que si:

$$\mathfrak{A}_V \models \phi_1,$$

Entonces hay $p_1, ..., p_l, q_1, ..., q_r \in A[x]$ tales que la unión de ceros de ambos es V (primeras tres fórmulas) y que los ceros no se contienen los unos a los otros (últimas dos fórmulas). Por lo tanto, V es reducible.

Análogamente si V es reducible se tiene que:

$$\mathfrak{A}_V \models \phi_1.$$

Es decir, ser reducible es fuertmente definible para $n = 1$ en los campos algebraicamente cerrados.

□

La escritura en el caso de polinomios en n variables es un poco más complicada que en el caso anterior aunque sigue la misma estructura. Antes de pasar a la prueba, es pertinente introducir un poco de notación para hacer la escritura en el caso general lo más limpia posible.

Dada $\mu_i = (m_{i,1}, ..., m_{i,n})$ con $m_{i,l} \in \mathbb{N}\ \forall l \in \{1, ..., n\}$, definimos:

$$|\mu_i| := m_{i,1} + ... + m_{i,n}.$$

Suponiendo que nuestras incógnitas son $z_1, ..., z_n$, definimos lo siguiente:

$$z^{\mu_i} = z_1^{m_{i,1}} .... z_n^{m_{i,n}}.$$

Además, para que la escritura del polinomio se encuentre completamente determinada, dado $n \in \omega$ definimos el siguiente orden sobre $\{\mu_k\}_{k\in\omega}$. Dadas μ_k, μ_l decimos que $\mu_k \prec \mu_l$ sii:

- $m_{k,1} < m_{l,1}$ o
- ...
- $m_{k,r} < m_{l,r}$.

Con dicha notación tenemos que un polinomio en $p(z_1, ..., z_n)$ de grado m se ve de la siguiente manera:

$$p(z_1, ..., z_n) = \Sigma_{|\mu|\leq m} c_\mu z^\mu.$$

Donde el orden en la suma está dado por el orden $\prec$. Note que como el campo es conmutativo realmente no importa el orden visto desde el punto de vista del álgebra, pero desde el punto de la lógica es muy importante ya que nos dice donde se encuentra cada uno de los coeficientes.

Por último recuerde que el número de maneras de sumar n dados k números (donde sí importa el orden) es:

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Por lo tanto, si ponemos 0 en todos aquellos términos que no ocurren en el polinomio p, se tiene que el número total de términos del polinomio es:

$$\binom{m+n-1}{n-1} + \binom{(m-1)+n-1}{n-1} + ... + \binom{n-1}{n-1}.$$

Con todo ello en mente, pasemos a probar la proposición.

Lema 2.4.2. *Ser reducible es fuertemente definible en los campos algebraicamente cerrados.*

Demostración. Sean $n \geq 1$, $L = L \cup \{U\}$, donde U es una relación $n-$aria, y $\mathfrak{A}$ campo algebraicamente cerrado. Lo que haremos será definir una fórmula ϕ_n que cumpla con la equivalencia dada de la definición de reducibilidad.

Antes de ello, para simplificar la escritura de ϕ_n, definiremos $p(x^{s^1})$ de la siguiente manera:

$$p(x^{s^1}) := x^{1,s_1}_{\binom{n+s_1-1}{s_1-1}} z^{\mu_{\binom{n+s_1-1}{s_1-1}},\, s_1} + x^{1,s_1}_{\binom{n+s_1-1}{s_1-1}-1} z^{\mu_{\binom{n+s_1-1}{s_1-1}-1}\,,s_1} + ... + x^{1,s_1}_1 z^{\mu_1\,,s_1} +$$
$$x^{1,s_1-1}_{\binom{n+s_1-2}{s_1-2}} z^{\mu_{\binom{n+s_1-2}{s_1-2}},s_1-1} + ... + x^{1,1}_{\binom{n}{1}} z^{\mu_{\binom{n}{1}},\, s_1} + ... + x^{1,1}_1 z^{\mu_1,\, s_1} + x^{1,0}$$

Donde $|\mu_{\binom{n+s_1-j}{s_1-j-1}-k,\, s_1-j}| = s_1 - j$ para todo $j \in \{0, ..., s_1\}$ y $k \in \{0, .., \binom{n+s_1-j}{s_1-j-1} - 1\}$. Y $\mu_{\binom{n+s_1-j}{s_1-j-1}-k,\, s_1-j} \prec \mu_{\binom{n+s_1-j}{s_1-j-1}-l,\, s_1-j}$ si $l < k$.

Note que por las observaciones hechas antes del teorema cualquier polinomio puede ser visto de la manera presentada.

Con ello definamos a $\beta_{x_{s^1,...,s^l}}(z_1, ..., z_n)$ de la siguiente manera:

$$\beta_{x_{s^1,...,s^l}}(z_1, ..., z_n) :=$$

$$\begin{array}{ll} (p(x^{s_1}) = 0 & \wedge \\ ...... & \wedge \\ p(x^{s_l}) = 0) & \end{array}$$

Con dicha notación, definamos ϕ_n:

$$\bigvee_{n=2}^{\infty} \Big(\vee_{l+r=n;\, l,r\geq 1} \Big(\bigvee_{m=2}^{\infty} \Big(\vee_{\Sigma_{i=1}^{l} k_i + \Sigma_{i=1}^{r} p_i = m;\, k_i, p_i \geq 0\ \forall i}$$
$$\Big(\exists x^{1,k_1}_{\binom{n+k_1-1}{k_1-1}} \exists x^{1,k_1}_{\binom{n+k_1-1}{k_1-1}-1} ... \exists x^{1,k_1}_1 \exists x^{1,k_1-1}_{\binom{n+(k_1-1)-1}{k_1-2}} ... \exists x^{1,1}_{\binom{n}{k_1}} ... \exists x^{1,1}_1 \exists x^{1,0} \exists x^{2,k_2}_{\binom{n+k_2-1}{k_2-1}} ... \exists x^{l,k_l}_{\binom{n+k_l-1}{k_l-1}} ... \exists x^{l,1}_n$$
$$... \exists x^{l,1}_1 \exists x^{l,0} \exists y^{1,p_1}_{\binom{n+p_1-1}{p_1-1}} ... \exists y^{1,p_1}_1 ... \exists y^{1,0} .... \exists y^{r,0} \big((\forall w_1 ... \forall w_n (\alpha_{x_{k_1},...,x_{k_l}}(\bar{w}) \rightarrow$$
$$U(\bar{w})) \wedge (\forall z_1 ... \forall z_n (\alpha_{y_{p_1},...,y_{p_r}}(\bar{z}) \rightarrow U(\bar{z}))) \wedge (\forall f_1 ... \forall f_n (U(\bar{f}) \rightarrow (\alpha_{y_{p_1},...,y_{p_r}}(\bar{f}) \vee \alpha_{x_{k_1},...,x_{k_l}}(\bar{f})))) \wedge$$
$$(\exists g_1 ... \exists g_n (\alpha_{y_{p_1},...,y_{p_r}}(\bar{g}) \wedge \neg \alpha_{x_{k_1},...,x_{k_l}}(\bar{g}))) \wedge (\exists h_1 ... \exists h_n (\neg \alpha_{y_{p_1},...,y_{p_r}}(\bar{h}) \wedge \alpha_{x_{k_1},...,x_{k_l}}(\bar{h})))) \big) \Big) \Big) \Big)$$

Note que la definición de ϕ_n es análoga a la de ϕ_1, sólo que contamos con más cuantificadores ya que dichos cuantificadores son necesarios para determinar los coeficientes de todos los términos del polinomio.

Por lo tanto, dado $V \subseteq A^n$ se tiene que:

$$\mathfrak{A}_V \vDash \phi_n \text{ sii } V \text{es reducible.}$$

Es decir, ser reducible es definible en nuestro lenguaje. □

Corolario 2.4.1. *Ser irreducible es fuertmente definible en los campos algebraicamente cerrados.*

Demostración. Considere para cada $n \in \omega$ la negación de la ϕ_n anterior. □

Por lo tanto, por la proposición 1.2.4 se tiene que ser irreducible es definible en los campos algebraicamante cerrados.[10] Observe que en particular ser irreducible es definible en $\mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$.

Ahora bien, el siguiente paso es ver que la propiedad "dimensión n" para variedades irreducibles es definible en nuestro lenguaje, pero debido a que la prueba requiere ciertos conceptos y técnicas tangenciales a la tesis, la prueba se encuentra en el apéndice B.

La propiedad libre de dependencia aditiva y libre de dependencia multiplicativa son definibles en nuestro lenguaje debido a las proposiciones 2.4.1 y 2.4.2 como veremos en los dos próximos lemas.

Lema 2.4.3. *Ser variedad libre de dependencia aditiva es definible en* $\mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$.

Demostración. Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$ y $\phi(\bar{x}, \bar{z}; \bar{y})$ una fórmula. Por la proposición 2.4.1, V es libre sii para todo $\bar{m} \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y $a \in A$ se tiene que $\Sigma^n_{i=1} m_i x_i - a \notin \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V)$. De donde, definimos la fórmula $\pi_\phi(\bar{y})$ como sigue:

$$\pi_\phi(\bar{y}) := \forall m_1 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} ... \forall m_n \in \\ \mathbb{Z}\backslash\{0\} \forall w_1 \exists w_2 \exists x_1 ... \exists x_n \exists z_1 ... \exists z_n (\phi(\bar{x}, \bar{z}; \bar{y}) \wedge E(w_1, w_2) \wedge \Sigma^n_{i=1} m_i x_i \neq w_1).$$

Observe que dado $\bar{b} \in A$, si $V = \{(\bar{a}, \bar{a}') \in A^n \times (A^*)^n | \mathfrak{A} \vDash \phi[\bar{a}, \bar{a}'; \bar{b}]\}$. La fórmula anterior afirma que para todo $\bar{m} \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y $a \in A$ hay un $(\bar{a}, \bar{a}') \in V$ tal que $\Sigma^n_{i=1} m_i a_i - a \neq 0$. Por ende, $\Sigma^n_{i=1} m_i x_i - a \notin \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V)$. Lo cual implica que V es libre de dependencia aditiva.

Por lo tanto, ser libre de dependencia aditiva es definible en $\mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$. □

Lema 2.4.4. *Ser variedad libre de dependencia multiplicativa es definible en* $\mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$.

Demostración. La prueba es análoga a la anterior pero utilizando la proposición 2.4.2. □

Por último veamos que la propiedad ser rotunda es definible en nuestro lenguaje.

Lema 2.4.5. *Ser variedad rotunda es definible en* $\mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$.

Demostración. Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$ y $\phi(\bar{x}, \bar{z}; \bar{y})$ una fórmula tal que $V = \{(\bar{a}, \bar{a}') \in A^n \times (A^*)^n | \mathfrak{A} \vDash \phi[\bar{a}, \bar{a}'; \bar{b}]\}$ es una variedad para toda $\bar{b}$. Dada $M \in Mat_{n\times n}(\mathbb{Z})$ se tiene que $[M]V$ es definible por

$$\psi_M(\bar{x}, \bar{z}; \bar{y}) := \exists v_1 ... \exists v_n \exists w_1 ... \exists w_n (\phi(\bar{v}, \bar{w}; \bar{y}) \wedge (\bigwedge_{i=1}^n x_i = \Sigma^n_{i=j} m_{i,j} v_i) \wedge (\bigwedge_{i=1}^n z_i = \Pi^n_{i=j} w_i^{m_{i,j}})).$$

Dado que hay un número numerable de martrices con coeficientes en los enteros, hay un número numerable de ψ_Ms, por lo tanto para cada $i \in \{1, ..., n\}$ el conjunto

$$A_i = \{\psi_M | rg(M) = i\}$$

es numerable.

Note que como la dimensión es definible por el apéndice B, para cada fórmula ψ_M hay una fórmula $\pi^{n,k}_{\psi_M}(\bar{y})$ tal que para toda $\bar{b}$, si $V = \{(\bar{a}, \bar{a}') \in A^n \times (A^*)^n | \mathfrak{A} \vDash \phi[\bar{a}, \bar{a}'; \bar{b}]\}$ entonces

$$\mathfrak{A} \vDash \pi^{n,k}_{\psi j}[\bar{b}] \ \text{ sii } \ dim([M]V) \geq k.$$

[10] De hecho ser irreducible es definible en $L_{\omega,\omega}$ pero la prueba es más complicada y para nuestros propósitos la construcción anterior es suficiente, ver [14] para una prueba.

Con dichos hechos a la mano, definamos

$$\pi_\phi(\bar{y}) := \bigwedge_{k=1}^{n}(\bigwedge_{\psi_M \in A_k} \pi^{n,k}_{\psi_M}(\bar{y})).$$

Dicha π_ϕ nos afirma que V es rotunda, ya que se están considerando todos los posibles rangos de matrices de $n \times n$ y estamos forzando a que la $dim([M]V) \geq rg(M)$.

Por lo tanto, ser rotunda es una propiedad definible para variedades. □

Ya que hemos sido capaces de demostrar que todos los elementos del axioma V son definibles e $L_{\omega_1,\omega}$ estamos en posición de escribir el axioma de manera formal.

V Cerradura exponencial fuerte

Sean $n \in \omega$ y $\{V_j\}_{j\in J}$ una enumeración de las variedades libres, rotundas, irreducibles y de dimensión n en $A^n \times (A^*)^n$; es posible realizar esto último pues sabemos que todas esas propiedades son definibles en nuestro lenguaje. Con ello, definamos para toda $r \in \omega$:

$$\theta_{n,r} := \forall j \in J \forall y_1 ... \forall y_r \exists x_1 ... \exists x_n \forall m_1 \in \mathbb{Q} ... \forall m_{n+r} \in \mathbb{Q}\Big(((\bar{x}, E(\bar{x})) \in V_j) \wedge \big(\Sigma^n_{k=1} m_k x_k + \Sigma^r_{k=1} m_{n+k} y_k = 0 \to \bigwedge^n_{k=1} m_k = 0\big)\Big)$$

Por lo que el axioma V será $\theta = \{\theta_{n,r}\}_{(n,r)\in\omega\times\omega}$.

No es trivial que dicho esquema en $L_{\omega_1,\omega}$ sea equivalente a lo que llamamos axioma V en la sección anterior, pero la siguiente proposición nos afirma que en el caso de nuestro interés es cierta dicha afirmación.

Proposición 2.4.3. *Dado $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$, $\mathfrak{A} \models \{\theta_{n,r}\}_{n,r\in\omega}$ sii $\mathfrak{A}$ satisface el axioma V.*

Demostración. $\boxed{\leftarrow}$ Sean $j \in J$ y $A_0 = \{a_1, ..., a_r\} \subseteq_{fin} A$, supongamos sin pérdida de generalidad que V está definida sobre A_0, ya que en caso de que no sea así podemos extenerderlo a $A'_0 \subseteq_{fin} A$. Como J es una parametrización sobre variedades irreducible, rotundas, libres y de dimensión n y A_0 es finito, por el axioma V tenemos un $(\bar{x}, E(\bar{x}))$ genérico en V sobre A_0. Debido a que V está definido sobre A_0 y $(\bar{x}, E(\bar{x})) \in A^n \times (A^*)^n$ se tiene que $(\bar{x}, E(\bar{x})) \in V$.

Ahora bien, sean $\bar{m} \in \mathbb{Q}^{n+r}$ y $\Sigma^n_{i=1} m_i x_i + \Sigma^r_{i=1} m_{n+i} a_i = 0$, multiplicando por todos los cocientes de las fracciones tenemos que $\Sigma^n_{i=1} m'_i x_i + \Sigma^r_{i=1} m'_{n+i} a_i = 0$ con $m'_i \in \mathbb{Z}$. Entonces al ser $(\bar{x}, E(x))$ genérico sobre A'_0 y V definible sobre A'_0 tenemos que $\Sigma^n_{i=1} m'_i x_i + \Sigma^r_{i=1} m'_{n+i} a_i \in \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V)$, de donde al ser V libre, por la proposición 2.4.1 se tiene que $m_i = 0$ para toda $i \in \{1..., n\}$. Es decir, $\mathfrak{A} \models \{\theta_{n,r}\}_{n\in\omega}$.

$\boxed{\rightarrow}$ Sean V una variedad irreducible, libre, rotunda de dimensión n y $A_r = \{a_i\}_{i\in\{1,...,r\}} \subseteq_{fin} A$. Primero por lema 2.3.1 (2) hay $B \subseteq_{fin} A$ tal que $\partial(A_r) = \delta(B \cup A_r)$ y por lema 2.3.1 (1) para todo $X \subseteq A$ se satisface que $\delta(X/A_r \cup B) \geq 0$.

Debido a la manera en como realizó la enumeración y la V que nos tomamos, hay un $j \in J$ tal que $V = V_j$. Por lo tanto, hay un $(\bar{x}, E(\bar{x}))$ que cumple con el esquema para $A_r \cup B$. Se sigue directo de como nos tomamos el punto que $\{x_1, ..., x_n\}$ son linealmente independientes, ya que si $m_{n+i} = 0$ con $i \in \{1, ..., r\}$ nos queda que para todo $\bar{m} \in \mathbb{Q}^n$ $\Sigma^n_{i=1} m_i x_i = 0$ implica que $m_i = 0$, que es precisamente la definición de ser linealmente independientes. Y que $\langle x_1, ..., x_n\rangle \cap \langle A_r \cup B\rangle = \{0\}$, la prueba de ello es análoga a la prueba de independencia lineal. De donde podemos concluir que $lin(\bar{x}/A_r \cup B) = n$.

Ahora bien, por como nos tomamos a B, $\delta(\bar{x}/B \cup A_r) \geq 0$ y dado que $lin(\bar{x}/B \cup A_r) = n$ por el lema 2.1.1 concluimos que

$$tr(\{\bar{x}, E(\bar{x})\}/B \cup A_r \cup E(B \cup A_r)) \geq n.$$

De donde por la proposición 1.3.4 la $dim(Loc_{B\cup A_r \cup E(B\cup A_r)}(\bar{x}, E(\bar{x}))) \geq n$ pero ya que $Loc_{B\cup A_r \cup E(B\cup A_r)}(\bar{x}, E(\bar{x}))$ V se tiene que:

$$dim(Loc_{B\cup A_r \cup E(B\cup A_r)}(\bar{x}, E(\bar{x}))) = n.$$

Como $Loc_{B\cup A_r \cup E(B\cup A_r)}(\bar{x}, E(\bar{x})) \subseteq V$, V es irreducible y

$$dim(V) = n = dim(Loc_{B\cup A_r \cup E(B\cup A_r)}(\bar{x}, E(\bar{x})))$$

por la proposición 1.3.3 llegamos a que

$$Loc_{B\cup A_r \cup E(B\cup A_r)}(\bar{x}, E(\bar{x})) = V.$$

De donde se sigue que $\mathbb{I}_{A_r}(\bar{x}, E(\bar{x})) = \mathbb{I}_{A_r}(V)$. Por lo tanto, $(\bar{x}, E(\bar{x}))$ es genérico en V sobre A_r. □

Dado que son equivalentes el esquema de axioma en $L_{\omega_1,\omega}$ y el axioma V modulo los axiomas I, II, III y IV y como únicamente trabajaremos con el axioma V una vez que se satisfagan los otros cuatro axiomas, nos referiremos indistintamente a ambos conceptos.

A la clase de estructuras que satisfacen los axiomas I, II, III, IV y V la denotaremos por $\mathcal{EC}^{cn}_{est,sch}$ y al conjunto de axiomas por $T_{\mathcal{EC}^{cn}_{est,sch}}$.

2.5. Agrandando el lenguaje

Por razones técnicas que serán evidentes en el último capítulo, será necesario aumentar nuestro lenguaje.[11] La razón por lo cual lo estamos haciendo en este momento es porque es necesario que el lector esté familiarizado con las variedades irreducibles, libres y rotundas. Sin más preámbulo agrandemos nuestro lenguaje.

Para cada variedad $V \subseteq A^{(n+l)} \times (A^*)^{(n+l)}$ irreducible en $\mathbb{Q}$ y para cada $A_l = \{a_1, ..., a_l\} \subseteq A$, sea V_{A_l} la variedad que se obtiene de V al sustituir las $2l$ variables de V por $\{a_1, ..., a_l\} \cup \{E(a_1), ..., E(a_l)\}$.

Para cada variedad $V \subseteq A^{(n+l)} \times (A^*)^{(n+l)}$ irreducible en $\mathbb{Q}$ y para cada $A_l = \{a_1, ..., a_l\} \subseteq A$ introduciremos la relación $l-$aria $R_V(x_1, ..., x_l)$ tal que:

$\mathfrak{A} \models R_V[a_1, ..., a_l]$ sii "La variedad V_{A_l} es irreducible, libre sobre $< A_l >_{\mathfrak{A}}$ y existe una realización genérica $(\bar{b}, E(\bar{b})) \in A^n \times (A^*)^n$ sobre $A_l \cup E(A_l)$ de V_{A_l} en $Ecl(A_l)$"

[11] Específicamente lo estamos haciendo para que nuestra clase sea cuasiminimal excelente (ver sección 4.2 para la definición).

Como todas estas nociones son expresables en $L_{\omega_1,\omega}$, como hemos visto en la sección anterior, contamos con una extensión definible de nuestro lenguaje y al nuevo lenguaje lo denotaremos por L^*.

Ahora bien, interpretando a R_V de forma canónica en $\mathcal{EC}^{cn}_{est,sch}$, obtenemos una nueva clase de estructuras, la cual denotaremos por $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$. Dicha clase es la clase de los campos pseudo-exponenciales. De igual manera se tiene la teoría en este lenguaje, la cual denotaremos por $T_{\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}}$.

No es claro que $T_{\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}}$ tenga un modelo, podría suceder que nuestros axiomas sean incosistentes en cuyo caso únicamente le hicimos perder su tiempo al lector; afortunadamente sí tiene modelos. En el próximo capítulo construiremos un modelo particular y con ayuda de él y de la teoría de las clases cuasiminimal excelentes podremos afirmar que hay un único modelo para cada cardinalidad no numerable.

Capítulo 3

$\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ es no vacía

En este capítulo vamos a construir un modelo de $T_{\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}}$ de forma algebraica, es decir, construiremos nuetro primer campo pseudo-exponencial. Dado que la construcción se hará de forma algebraica haremos poca referencia a nuestro lenguaje L^*, pero en todo momento estamos suponiendo que los campos construidos interpretan a L^* de forma canónica.

La construcción del modelo es bastante laboriosa y requiere de un cierto conocimento de la teoría de campos, álgebra lineal y teoría de grupos. Dado que hasta ahora no hemos ahondado en ninguna de estas áreas lo que haremos será en un primer momento recordar los resultados algebraicos necesarios[1] para después ver el paso constructivo pertinente.

3.1. Axiomas I, II y III

En esta sección se construirá un modelo de los axiomas I, II y III, dejando para la próxima sección los axiomas IV y V.

Dado que la construcción se hará agregando poco a poco elementos a campos de característica cero, será necesario introducir un poco de notación para referirnos a campos que satisfagan parcialmente los axiomas I y II.

Definición 3.1.1. Diremos que $\mathfrak{A}$ es un E-campo si $\mathfrak{A}$ es un campo de característica cero, donde $D_{\mathfrak{A}}$ es un subespacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ del grupo aditivo de A y $E_{\mathfrak{A}}$ es homomorfismo $D_{\mathfrak{A}}$ en A^*.

Lo que haremos en el primer paso de la construcción es construir una función exponencial si contamos con $D_{\mathfrak{A}}$ un subespacio vectorial de A sobre $\mathbb{Q}$. Pero antes de ello es pertinente introducir dos definiciones que serán sumamente útiles en el capítulo.

Definición 3.1.2. Dado $\mathfrak{A}$ un campo de característica cero y $a \in A$ diremos que $\{a_i\}_{i\in\omega}$ es un **sistema adecuado de raíces** si para toda $j, r \in \omega$ se satisface que:

$$a_{jr}^j = a_r$$

[1] La mayoría de resultados serán únicamente enunciados como *hechos* debido a la cantidad de teoría que se debe desarrollar para demostrarlos y a lo conocido que son los mismos.

Definición 3.1.3. Dados $\mathfrak{A}$ un campo de característica cero, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y $b \in B$. Diremos que **el tipo de isomorfismo del sistema adecuado de raíces de** b **es único sobre** $\mathfrak{A}$; si para cualesquiera dos campos $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ obtenidos de $\mathfrak{A}$ al agregar b y cualquier sistema adecuado de raíces de b, se tiene que existe un isomorfismo de $\mathfrak{A}_1$ a $\mathfrak{A}_2$ sobre $\mathfrak{A}$ tal que manda el sistema adecuado elegido en $\mathfrak{A}_1$ al sistema adecuado elegido en $\mathfrak{A}_2$.

Análogamente, dados $\mathfrak{A}$ un campo algebraicamente cerrado, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y $\{b_1, ..., b_n\} \subseteq B$. Diremos que el tipo de isomorfismo de los sistemas adecuados de raíces de $\{b_1, ..., b_n\}$ es único sobre $\mathfrak{A}$; si para cualesquiera dos campos $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ obtenidos de $\mathfrak{A}$ al agregar $\{b_1, ..., b_n\}$ y cualquier sistema adecuado de raíces para b_i con $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que existe un isomorfismo de $\mathfrak{A}_1$ a $\mathfrak{A}_2$ sobre $\mathfrak{A}$ tal que manda a cada sistema adecuado elegido en $\mathfrak{A}_1$ a su respectivo sistema adecuado elegido en $\mathfrak{A}_2$.

Construcción 1. *Sean $\mathfrak{A}$ un campo de característica cero y $D_{\mathfrak{A}}$ un subespacio vectorial de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathbb{Q}$. Sea $\{b_i\}_{i\in I}$ una $\mathbb{Q}$ base del espacio vectorial $D_{\mathfrak{A}}$. Para cada $i \in I$ tomemos un $c_{i,1} \in A$ y definamos $E_{\mathfrak{A}}(b_i) = c_{i,1}$. Para que $E_{\mathfrak{A}}$ sea un homomorfismo del grupo aditivo al multiplicativo necesitaremos que dado $n \in \mathbb{N}$, $E_{\mathfrak{A}}(b_i/n)$ sea la raíz n-ésima de $c_{i,1}$. Pero dado que hay n raíces debemos elegirla de manera "adecuda".*

Para cada $i \in I$ elijamos $\{c_{i,m}\}_{m\in\omega}$ un sistema adecuado de raíces. Definamos $E_{\mathfrak{A}}(b_i/n) = c_{i,n}$ para todo $i \in I$ y $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, dado $a \in D_{\mathfrak{A}}$, al ser $\{b_i\}_{i\in I}$ $\mathbb{Q}$ base, tenemos que $a = 1/n\Sigma_{i=1}^m r_i b_i$ con $r_i \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, definamos $E_{\mathfrak{A}}(a) = \Pi_{i=1}^m c_{i,n}^{r_i}$.

Lema 3.1.1. *$E_{\mathfrak{A}}$ está bien definida en $D_{\mathfrak{A}}$ y dados $a, b \in D_{\mathfrak{A}}$ se satiface que $E_{\mathfrak{A}}(a + b) = E_{\mathfrak{A}}(a)E_{\mathfrak{A}}(b)$.*

Demostración. Demostraremos únicamente la primera parte pues la segunda se sigue trivialmente de la construcción. Sea $a \in D_{\mathfrak{A}}$ y supongamos que $a = 1/n\Sigma_{i=1}^m r_i b_i$ y $a = 1/n'\Sigma_{i=1}^m r'_i b_i$.

De donde nos queda que

$$0 = a - a = \Sigma_{i=1}^m (r_i/n - r'_i/n')b_i.$$

Como las b_i son base $r_i = r'_i(n/n')$. Ahora bien tenemos que:

$$\begin{aligned}
E_{\mathfrak{A}}(a) = \Pi_{i=1}^m c_{i,n}^{r_i} &= \Pi_{i=1}^m (c_{i,n}^{r'_i n})^{1/n'} && [\text{Al tener } r_i = r'_i(n/n')] \\
&= \Pi_{i=1}^m (c_{i,1}^{r'_i})^{1/n'} && [\text{Al ser sistema adecuado de raíces}] \\
&= \Pi_{i=1}^m (c_{i,n'}^{r'_i n'})^{1/n'} && [\text{Al ser sistema adecuado de raíces}] \\
&= \Pi_{i=1}^m c_{i,n'}^{r'_i} && [\text{Cancelando exponentes}]
\end{aligned}$$

Por lo que $E_{\mathfrak{A}}$ está bien definida. □

Lo siguiente que queremos es que nuestros campos tengan núcleo estándar, para que se encuentren en $\mathcal{E}_{est}$. Justamente ello es lo que se hará en el siguiente paso de la construcción pero antes es pertinente recordar un poco de la teoría de campos.

Denotaremos por $\mathbb{Q}^{ab}$ la extensión abeliana máxima de $\mathbb{Q}$ y por el teorema de Kronecker-Webber tenemos que:

$$\mathbb{Q}^{ab} = \mathbb{Q}(\text{todas las raíces de la unidad}).$$

Construcción 2. *Sea $\mathfrak{A}_0$ un campo tal que $\mathbb{Q} = A_0$ y $D_{\mathfrak{A}_0} = \{0\}$. Considere a τ un elemento trascendente sobre $\mathbb{Q}$ y el campo generado por τ en $\mathbb{Q}^{ab}$.*

Sea $\mathfrak{N}$ el $E-$campo tal que $N = \mathbb{Q}^{ab}(\tau)$ y cuya exponencial la definimos de la siguiente manera. Considere $\{1_m\}_{m\in\omega}$ un sistema adecuado de raíces de la unidad, note que $1_m \in \mathfrak{N}$ y sea $D_{\mathfrak{N}} = \langle\tau\rangle$ [2]. Definamos $E_{\mathfrak{N}}(m\tau/n) = 1_n^m$.

Note que bajo dicha construcción tenemos que el $Ker_{E_{\mathfrak{N}}} = \tau\mathbb{Z}$, es decir, $\mathfrak{N}$ es un $E-$campo con núcleo estándar.

Dos hechos triviales de demostrar pero que nos serán sumamente útiles posteriomente son las dos siguientes proposiciones.

Técnicamente únicamente definimos lo que era ser una subestructura fuerte para elementos de $\mathcal{E}_{est,sch}$ pero se puede generalizar de manera obvia la relación para $E-$campos (ver definición 2.2.1). Debido a que el dominio de la exponencial en $E-$campos es distinto de todo el campo en vez de pedir la condición de ser subestructura en L, pediremos que $\mathfrak{A}$ sea subcampo de $\mathfrak{B}$ y que $E_{\mathfrak{B}} \restriction_{D_{\mathfrak{A}}} = E_{\mathfrak{A}}$.

Proposición 3.1.1. *Se tiene que $\mathfrak{A}_0 \precsim \mathfrak{N}$, donde $\mathfrak{A}_0$ y $\mathfrak{N}$ son las estructuras definidas en el paso dos de la construcción.*

Demostración. Sea $A_n = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq D_{\mathfrak{N}}$. Por construcción ello implica que $a_i = (m_i/n_i)\tau$ para algún $m_i/n_i \in \mathbb{Q}$ y por definición de la exponencial $E_{\mathfrak{N}}((m_i/n_i)\tau) = (1_{n_i})^{m_i}$. Dado que τ es trascendente sobre $\mathbb{Q}$ y $E_{\mathfrak{N}}(A_n)$ es algebraicamente dependiente sobre $\mathbb{Q}$ podemos concluir que $tr(A_n \cup E_{\mathfrak{N}}(A_n)) = 1$. Trivialmente se tiene que $lin(A_n) = 1$.

Por lo que:

$$
\begin{aligned}
&\delta_{\mathfrak{N}}(A_n/D_{\mathfrak{A}_0})\\
&\qquad = tr(A_n \cup E_{\mathfrak{N}}(A_n)/D_{\mathfrak{A}_0} \cup E_{\mathfrak{N}}(D_{\mathfrak{A}_0})) - lin(A_n/D_{\mathfrak{A}_0}) && \text{[Lema 2.1.1]}\\
&\qquad = tr(A_n \cup E_{\mathfrak{N}}(A_n)) - tr(\{0,1\}) - (lin(A_n) - lin(\{0\})) && \text{[Definición de } \delta \text{ y } D_{\mathfrak{A}_0} = \{0\}]\\
&\qquad = 1 - 0 - 1 + 0 = 0 && \text{[Por el párrafo anterior]}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\delta_{\mathfrak{N}}(A_n/D_{\mathfrak{A}_0}) \geq 0$ y como $\mathfrak{A}_0$ es subcampo de $\mathfrak{N}$ y $E_{\mathfrak{A}} \restriction_{D_{\mathfrak{A}_0}} = E_{\mathfrak{A}_0}$, concluimos que $\mathfrak{A}_0 \precsim \mathfrak{N}$. ☐

Proposición 3.1.2. *Sea $\mathfrak{A}$ un $E-$campo. Si $\mathfrak{A}_0 \precsim \mathfrak{A}$ entonces $\mathfrak{A}$ cumple con la propiedad de Schanuel, donde $\mathfrak{A}_0$ es la estructura definida en el paso dos de la construcción.*

Demostración. Sea $A_n = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq D_{\mathfrak{A}}$. De manera análoga a lo realizado anteriormente se tiene que $\delta_{\mathfrak{A}}(A_n/D_{\mathfrak{A}_0}) = tr(A_n \cup E_{\mathfrak{A}}(A_n)) - lin(A_n)$. Como $\mathfrak{A}_0 \precsim \mathfrak{A}$ entonces $\delta_{\mathfrak{A}}(A_n/D_{\mathfrak{A}_0}) \geq 0$, de donde concluimos que

$$\delta_{\mathfrak{A}}(A_n) = \delta(A_n/D_{\mathfrak{A}_0}) = tr(A_n \cup E_{\mathfrak{A}}(A_n)) - lin(A_n) \geq 0.$$

Por lo tanto $\mathfrak{A}$ cumple con la propiedad de Schanuel. ☐

El siguiente paso de la construcción consistirá en extender el dominio de la exponencial de la manera más *libre* posible.

[2] Recordemos que $\langle\tau\rangle = span_{\mathbb{Q}}(\tau)$.

Construcción 3. *Sea $\mathfrak{A}$ un E-campo con núcleo estándar. Construiremos $\mathfrak{A}^e$ campo que extienda $\mathfrak{A}$ tal que $D_{\mathfrak{A}^e} \supseteq A$. Considere $A/D_{\mathfrak{A}}$ el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial cociente cuya base es $\{b_i + D_{\mathfrak{A}}\}_{i\in I}$.*

Sea F una extensión de campo de A tal que para cada b_i exista un sistema adecuado de raíces $\{c_{i,m}\}_{m\in\omega}$ y tal que las $\{c_{i,1}\}_{i\in I}$ son algebraicamente independientes sobre A.

Sea $D_{\mathfrak{A}^e} = \langle D_{\mathfrak{A}} \cup \{b_i\}_{i\in I}\rangle$ y definamos $E_{\mathfrak{A}}(b_i)$ y $E_{\mathfrak{A}}(b_i/n)$ usando los sistemas adecuados de raíces correspondientes.

Ahora bien, dado $a = (1/k)\Sigma_{i=1}^m n_i b_i + d$ con $d \in D_{\mathfrak{A}}$. Definamos

$$E_{\mathfrak{A}^e}(a) := E_{\mathfrak{A}}(d)\Pi_{i=1}^m c_{i,k}^{n_i}.$$

Sea $\mathfrak{A}^e$ el campo generado por $A \cup \{c_{i,m}\}_{i\in I, m\in\omega}$ contenido en F. Notemos que $E_{\mathfrak{A}^e}\restriction_{D_{\mathfrak{A}}} = E_{\mathfrak{A}}$.

Veamos que cumple con lo que queríamos, es decir, $A \subseteq D_{\mathfrak{A}^e}$.

Proposición 3.1.3. *Dado $a \in A$ existe $b \in A^e$ tal que $E_{\mathfrak{A}^e}(a) = b$, es decir, $A \subseteq D_{\mathfrak{A}^e}$.*

Demostración. Dado que $\{b_i + D_{\mathfrak{A}}\}_{i\in I}$ forman una base se tiene que dado $a \in A$, $a = d + 1/n\Sigma_{i=1}^m r_i b_i$ para algún $d \in D_{\mathfrak{A}}$ y por definición $E_{\mathfrak{A}^e}(a) = E_{\mathfrak{A}}(d)\Pi_{i=1}^m c_{i,n}^{r_i}$, es decir, $a \in D_{\mathfrak{A}^e}$. □

Proposición 3.1.4. *Si $\mathfrak{A}$ es un $E-$campo numerable entonces $\mathfrak{A}^e$ es numerable.*

Demostración. Como A es numerable, la base $\{b_i + D_{\mathfrak{A}}\}_{i\in I}$ es numerable y por ende $\{c_{i,m}\}_{i\in I, m\in\omega}$ es numerable. Por lo que $\mathfrak{A}^e$ es numerable. □

No es necesariamente cierto que $D_{\mathfrak{A}^e} = A^e$. De hecho únicamente ocurrirá si $A = A^e$, en cuyo caso realmente no se hizo nada, por lo que iteraremos esta construcción para obtener un campo donde el dominio de $E_{\mathfrak{A}}$ cubra todo el campo. Además como las $\{c_{i,1}\}_{i\in I}$ son algebraicamente independientes sobre A, en particular ningún $c_{i,1}$ es raíz de la unidad, por lo que no crece el núcleo.

Construcción 4. *Dado $\mathfrak{A}$ un $E-$campo con núcleo estándar definamos recursivamente:*

- $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}$.
- $\mathfrak{A}^n = (\mathfrak{A}^{n-1})^e$.

*Sea $\mathfrak{A}^E = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}^n$. A dicho campo lo llamaremos la $E-$**extensión libre** de $\mathfrak{A}$.*

Proposición 3.1.5. *Si $\mathfrak{A}$ es un $E-$campo con núcleo estándar entonces $\mathfrak{A}^E$ es $E-$campo con núcleo estándar tal que $D_{\mathfrak{A}^E} = A^E$.*

Demostración. Note que $\mathfrak{A}^E$ es un $E-$campo al ser la unión de $E-$campos cuyas funciones son compatibles. Para ver la igualdad, es trivial que $D_{\mathfrak{A}^E} \subseteq \mathfrak{A}^E$. Para probar la otra contención, sea $a \in \mathfrak{A}^E$, de donde $a \in \mathfrak{A}^n$ para alguna $n \in \omega$ y por construcción $a \in D_{(\mathfrak{A}^n)^e} \subseteq D_{\mathfrak{A}^E}$. Por lo tanto, $D_{\mathfrak{A}^E} = A^E$.

Como $\mathfrak{A}$ tiene núcleo estándar y por la observación previa a la construcción 4 tenemos que el núcleo no cambia, concluimos que $\mathfrak{A}^E$ tiene núcleo estándar. □

El siguiente paso de la construcción consiste en cerrar algebraicamente a $\mathfrak{A}$ sin modificar el dominio de la exponencial.

Construcción 5. *Sea $\mathfrak{A}$ un $E-$campo con núcleo estandar y sea $\mathfrak{A}^a$ su cerradura algebraica, definamos $D_{\mathfrak{A}^a} = D_{\mathfrak{A}}$ y $E_{\mathfrak{A}^a} = E_{\mathfrak{A}}$.*

Hecho 3.1.1. *Sea $\mathfrak{A}$ un $E-$campo numerable entonces $\mathfrak{A}^a$ es numerable.* [3]

Dado que los campos pseudo-exponenciales son algebraicamente cerrados y que el dominio de la exponencial cubre todo el campo, lo que haremos será alternar los pasos 3,5 de la construcción para obtener un campo con dichas características.

Construcción 6. *Dado $\mathfrak{A}$ un $E-$campo con núcleo estándar definamos recursivamente:*

- $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}^a$.
- *Si n impar, definamos $\mathfrak{A}^n = (\mathfrak{A}^{n-1})^e$.*
- *Si n par, definamos $\mathfrak{A}^n = (\mathfrak{A}^{n-1})^a$*

Sea $\mathfrak{A}^{EA} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}^n$. A dicho campo lo llamaremos la $EA-$extensión libre de $\mathfrak{A}$.

Claramente $\mathfrak{A}^{EA}$ cumple con que el dominio de la exponencial es igual a A^{EA} y que es un campo algebraicamente cerrado.

El siguiente paso consiste en hacer a que la exponencial sea una función suprayectiva en A^*. Pero al igual que en los pasos anteriores es necesario primero recordar ciertos resultados algebraicos, en este caso de la teoría de grupos.

Hecho 3.1.2. *Sea G un grupo abeliano divisible y H un subgrupo de G divisible tal que contiene a la torsión de G entonces G/H es un grupo divisible y sin torsión.*[4]

Hecho 3.1.3. *Si G es un grupo abeliano divisible sin torsión entonces G puede ser visto como un $\mathbb{Q}-$espacio vectorial.*

Construcción 7. *Sea $\mathfrak{A}$ un $E-$campo con núcelo estándar y sea F un campo algebraicamente cerrado que tenga como subcampo a $\mathfrak{A}$. Construiremos $\mathfrak{A}^l$ extensión de campo de $\mathfrak{A}$ tal que $A^* \subseteq E_{\mathfrak{A}^l}(D_{\mathfrak{A}^l})$.*

Definamos recursivamente sobre los naturales el siguiente campo:

- $A_0 = A$.
- *A_{n+1} la cerradura bajo raíces de A_n.*

Con ello definamos $A^{rad} = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Considere a $(\mathfrak{A}^{rad})^*$ como grupo bajo la multiplicación. Es claro que dado que metimos todas las raíces el grupo es divisible. Por otro lado, el grupo $E_{\mathfrak{A}}(D_{\mathfrak{A}})$ como grupo multiplicativo es divisble al ser un $\mathbb{Q}-$espacio vectorial respecto al producto y note que contiene la torsión de $(\mathfrak{A}^{rad})^*$ al tener $\mathfrak{A}$ núcleo estándar. De donde tenemos que $(\mathfrak{A}^{rad})^*/E_{\mathfrak{A}}(D_{\mathfrak{A}})$ es un $\mathbb{Q}-$espacio vectorial respecto al producto.

Sean $\{b_i * E_{\mathfrak{A}}(D_{\mathfrak{A}})\}_{i\in I}$ base de $(\mathfrak{A}^{rad})^*/E_{\mathfrak{A}}(D_{\mathfrak{A}})$ tal que $b_i \in (\mathfrak{A}^{rad})^*$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, dado $c \in (\mathfrak{A}^{rad})^*$ lo podemos ver como $c = \Pi_{i=1}^m b_i^{q_i} E_{\mathfrak{A}}(d_i)$ tal que $d_i \in D_{\mathfrak{A}}$ y $q_i \in \mathbb{Q}$. Al igual que en las otras construcciones sea $\{b_{i,m}\}_{m\in\omega}$ un sistema adecuado de raíces para todo $i \in I$.

Sean $\{f_i\}_{i\in I}$ algebraicamente independientes sobre $\mathfrak{A}$ tal que $f_i \in F$ para toda $i \in I$. Sea $D_{\mathfrak{A}^l} = \langle D_{\mathfrak{A}} \cup \{f_i\}_{i\in I}\rangle$. Definamos $E_{\mathfrak{A}^l}(f_i/m) = b_{i,m}$ para toda $m \in \mathbb{N}$ e $i \in I$ y extendámos la exponencial de la manera usual.

Por último, sea $\mathfrak{A}^l$ el mínimo campo generado en F por $D_{\mathfrak{A}^l} \cup E_{\mathfrak{A}^l}(D_{\mathfrak{A}^l})$. Note que $E_{\mathfrak{A}^l}\restriction_{D_{\mathfrak{A}}} = D_{\mathfrak{A}}$.

[3] Se sigue del hecho que la cerradura algebraica de un campo numerable es numerable.

[4] Recuerde que un grupo es divisible si $nG = G$ para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ y que $g \in G$ se encuentra en la torsión de G si existe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tal que $ng = e$, donde e es la identidad en G.

Lo primero que nos gustaría destacar es que no se extiende el núcleo de $E_{\mathfrak{A}^l}$, ya que las $\{b_i\}_{i\in I}$ son base y que por hipótesis hay un $a \in A$ tal que dado 1_m raíz de la unidad se tiene que $E_{\mathfrak{A}}(a) = E_{\mathfrak{A}^l}(a) = 1_m$. Lo segundo que nos gustaría destacar es que nuestra construcción sí realiza lo que queremos.

Proposición 3.1.6. *Dado $b \in (A^{rad})^*$ existe un $a \in A^l$ tal que $E_{\mathfrak{A}^l}(a) = b$. En particular $A^* \subseteq E_{\mathfrak{A}^l}(D_{\mathfrak{A}^l})$.*

Demostración. Dado $b \in (A^{rad})^*$ por construcción $b = \Pi_{i=1}^m b_i^{m_i/n_i} E_{\mathfrak{A}}(d_i)$ que a su vez es igual a $\Pi_{i=1}^m (b_{i,n_i})^{m_i} E_{\mathfrak{A}}(d_i)$, por como se definieron las raíces.

Definamos $a := \Sigma_{i=1}^m f_i(m_i/n_i) + d_i$ y por como se definió la exponencial es claro que $E_{\mathfrak{A}^l}(a) = b$. □

Proposición 3.1.7. *Si $\mathfrak{A}$ es un $E-$campo numerable entonces $\mathfrak{A}^l$ es numerable.*

Demostración. Como $\mathfrak{A}$ es numerable se tiene que $(\mathfrak{A}^{rad})^*$ es numerable y como $E_{\mathfrak{A}}(D_{\mathfrak{A}})$ es numerable se sigue que la base $\{b_i * E_{\mathfrak{A}}\}_{i\in I}$ es numerable. Por lo que las $\{f_i\}_{i\in I}$ son numerables y en consecuencia $\langle D_{\mathfrak{A}} \cup \{f_i\}_{i\in I}\rangle$ es numerable. De donde se sigue que $\mathfrak{A}^l$ es numerable. □

Note que al igual que en las últimas dos extensiones $\mathfrak{A}^l$ no necesariamente cumple que $E_{\mathfrak{A}^l}(D_{\mathfrak{A}^l}) = (A^l)^*$ ya que se agregaron nuevos elementos a A^l y $A = A^l$ si $A^* \subseteq E_{\mathfrak{A}}(D_{\mathfrak{A}})$, en cuyo caso no se hizo nada. Para ello al igual que en las ocasiones pasadas es necesario iterar la construcción, a la construcción obtenida al realizar la iteración la llamaremos $\mathfrak{A}^L$.

En el siguiente paso lo que haremos será obtener un campo algebraicamente cerrado, con E homomorfismo del grupo aditivo al multiplicativo, que cubra todo el campo y cuya imagen sea todo el grupo multiplicativo del mismo.

Construcción 8. *Dado $\mathfrak{A}$ un $E-$campo con núcleo estándar definamos recursivamente:*

- $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}^e$.
- *Si $n = 2^k$ con $k > 0$, definamos $\mathfrak{A}^n = (\mathfrak{A}^{n-1})^a$.*
- *Si Si $n = 3^k$ con $k > 0$, definamos $\mathfrak{A}^n = (\mathfrak{A}^{n-1})^l$.*
- *Si $n = 5^k$ con $k > 0$, definamos $\mathfrak{A}^n = (\mathfrak{A}^{n-1})^e$.*
- *Si $n \neq 2^k, 3^k, 5^k$ con $k > 0$, definamos $\mathfrak{A}^n = \mathfrak{A}^{n-1}$.*

*Definamos $\mathfrak{A}^{ELA} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}^n$. A dicha extensión la llamaremos la ELA−**extensión libre de** $\mathfrak{A}$.*

Notemos que $\mathfrak{A}^{ELA}$ cumple con todo lo deseado, es decir, $\mathfrak{A}^{ELA}$ es campo algebraicamente cerrado de característica cero, tal que $E_{\mathfrak{A}^{ELA}}$ es un homorfismo suprayectivo del grupo aditivo del campo al grupo multiplicativo del mismo y tal que $D_{\mathfrak{A}^{ELA}} = A^{ELA}$. Lo que quiere decir (utilizando la notación del capítulo 2) es que $\mathfrak{A}^{ELA} \in \mathcal{E}_{est}$. Otro hecho importante que hemos estado resaltando es lo que sucede en el caso numerable, la situación no cambiará mucho en el caso de $\mathfrak{A}^{ELA}$.

Proposición 3.1.8. *Si $\mathfrak{A}$ un $E-$campo numerable entonces $\mathfrak{A}^{ELA}$ es numerable.*

Demostración. La prueba se realiza por inducción utilizando las proposiciones 3.1.4 y 3.1.7 y el hecho 3.1.1. Junto con el hecho de que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. □

Antes de continuar con la construcción es necesario demostrar el siguiente lema.

Lema 3.1.2. *Dado $\mathfrak{A}$ un $E-$campo con núcleo estándar se cumple que:*

1. $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}^e$.
2. $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}^a$.
3. $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}^l$.

Demostración. 1. Sea $X = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}^e}$ y $Y \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$ tal que para toda $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que:

$$x_i = 1/n_i \Sigma_{j=1}^k m_{i,j} b_j + a_i,$$

donde $a_i \in D_{\mathfrak{A}}$ y las clases de los b_j forman parte de la base de $A/D_{\mathfrak{A}}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$ y $j \in \{1, ..., k\}$.

Considere $Y' = Y \cup \{a_1, ..., a_n\} \subseteq D_{\mathfrak{A}}$. Afirmamos que $\delta(X/Y') \geq 0$.

Sea $X' = \{x'_1, ..., x'_m\} \subseteq X$ de tamaño máximo tal que $\{x'_1, ..., x'_m\}$ es linealmente independiente de Y, es decir, tal que $lin(X/Y) = lin(X'/Y) = m$. Afirmamos que $E(X') = \{E(x'_1), ..., E(x'_m)\}$ es algebraicamente independiente sobre $Y' \cup E(Y')$.

Lo primero que hay que notar es que dado que $tr(A_0) = tr(\mathbb{Q}(A_0))$ para todo $A_0 \subseteq A$ en vez de demostrar que $tr(E(X')/Y' \cup E(Y')) = m$ podemos demostrar que $tr(E(X'')/Y' \cup E(Y')) = m$ donde $X'' = \{n_i x_i | i \in \{1, ..., m\}\}$, los n_i son los n_i de la combinacióm lineal. Para probar esto último procedamos por contradicción, es decir, supongamos que hay $p(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{Q}(Y' \cup E(Y'))[\bar{z}] \backslash \{0\}$ tal que

$$p(E(x'_1), ..., E(x'_m)) = 0.$$

Considere $q(z'_1, ..., z'_k)$ el polinomio que se obtiene de $p(E(x'_1), ..., E(x'_m))$ al sustituir cada ocurrencia de $c_{i,1}$ por z'_i. En caso que ocurra $c^l_{i,1}$ con $l < 0$ en $p(E(x'_1), ..., E(x'_m))$, primero mulplicamos $p(E(x'_1), ..., E(x'_m))$ por $c^{-l}_{i,1}$ y después realizamos la sustitución.

Claramente $q(\bar{z}') \in \mathbb{Q}(Y' \cup E(Y'))[\bar{z}]$. Más aún, afirmamos que $q \neq 0$. La prueba de dicho hecho es bastante engorrosa y se sigue de la hipótesis de independencia lineal por lo que únicamente ejemplificaremos el caso donde $m = 3$, $m_{l,i} \in \mathbb{N}$ y p es un polinomio bastante simple.

Sea $p(z_1, z_2, z_3) = z_1^\alpha z_2^\beta - z_3^\gamma$ donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ entonces se tiene que

$$(\Pi_{i=1}^k c_{j,1}^{\alpha m_{1,j}} E(\alpha n_1 a_1)))(\Pi_{j=1}^k c_{j,1}^{\beta m_{2,j}} E(\beta n_2 a_2)) - \Pi_{j=1}^k c_{j,1}^{\gamma m_{3,j}} E(\gamma n_3 a_3) = 0.$$

De donde al sustituir como se menciona previo a la afirmación nos queda:

$$q(\bar{z}') = \Pi_{j=1}^k z_j'^{\alpha m_{1,j} + \beta m_{2,j}} E(\alpha n_1 a_1 + \beta n_2 a_2) - \Pi_{j=1}^k z_j'^{\gamma m_{3,j}} E(\gamma n_3 a_3).$$

Si $q = 0$ entonces para toda $j \in \{1, ..., k\}$ se tiene que:

$$\alpha m_{1,j} + \beta m_{2,j} - \gamma m_{3,j} = 0,$$

lo cual implica que

$$\alpha n_1 x_1 + \beta n_2 x_2 - \gamma n_3 x_3 - \alpha a_1 - \beta a_2 + \gamma a_3 = 0.$$

Por lo que $lin(X'/Y) \neq m$, lo cual es una contradicción con la hipótesis. De ahí que $q \neq 0$.

Por lo tanto, $q \neq 0$, ello implica que $\{c_{i,1}\}_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ es algebraicamente dependiente sobre $Y' \cup E(Y')$, contradiciendo el hecho de que por construcción $\{c_{i,1}\}_{i\in I}$ es algebraicamente indepenendiente sobre A.

Por ende, se tiene que $tr(E(X')/Y' \cup E(Y')) = m$, de donde como $E(X') \subseteq E(X) \cup X$ concluimos que:

$$tr(X \cup E(X)/Y' \cup E(Y')) \geq m,$$

es decir, $\delta(X/Y) \geq 0$.

Como además se tiene que $\mathfrak{A}$ es subcampo de $\mathfrak{A}^e$ y $E_{\mathfrak{A}^e} \restriction_{D_{\mathfrak{A}}} = E_{\mathfrak{A}}$, concluimos que $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}^e$.

2. Es trivial que $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}^a$, dado que $D_{\mathfrak{A}} = D_{\mathfrak{A}^a}$.

3. La prueba es análoga al iniciso 1. sólo que ahora los que sabemos que son algebraicamente independientes sobre $\mathfrak{A}$ son las $\{f_i\}_{i\in I}$.

□

De la proposición 2.1.3 se sigue el siguiente corolario.

Corolario 3.1.1. *Dado $\mathfrak{A}$ un $E-$campo con núcleo estándar se cumple que $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}^E$, $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}^A$, $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}^L$ y $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}^{ELA}$*

Con ello ya estamos en la posibilidad de dar nuestro primer modelo de los axiomas I, II y III.

Teorema 3.1.1. *$(\mathfrak{N})^{ELA}$ satiface los axiomas I, II y III.*

Demostración. Por construcción $(\mathfrak{N})^{ELA}$ satisface los axiomas I y II. Note que por la proposición 3.1.1 tenemos que $\mathfrak{A}_0 \precsim \mathfrak{N}$ y por el corolario anterior $\mathfrak{N} \precsim (\mathfrak{N})^{ELA}$. De donde por la transitividad de $\precsim$ se tiene que $\mathfrak{A}_0 \precsim (\mathfrak{N})^{ELA}$. Por lo que por la proposición 3.1.2 concluimos que $(\mathfrak{N})^{ELA}$ satisface la propiedad de Schanuel. Por lo tanto, $(\mathfrak{N})^{ELA}$ satisface los axiomas I, II y III, es decir, $(\mathfrak{N})^{ELA} \in \mathcal{E}_{est,sch}$. □

Por lo tanto, ya tenemos un modelo que cumple con nuestros tres primeros axiomas, antes de construir el que cumpla con la totalidad de ellos nos gustaría destacar que de hecho si empezamos con $\mathfrak{A}$ un $E-$campo numerable se tiene que $\mathfrak{A}^{ELA}$ es único salvo isomorfismos. La prueba de dicho hecho se encuentra fuera de los propósitos de esta tesis pero puede ser consultada en [17].

Hecho 3.1.4. *Si $\mathfrak{A}$ es un $E-$campo numerable entonces $\mathfrak{A}^{ELA}$ es único salvo isomorfismos.*

3.2. Axiomas IV y V

Si la construcción del modelo que satisface los axiomas I, II y III pareció pesada al lector por la cantidad de elementos algebraicos que involucra, esta segunda parte de la construcción algebraica es aún más técnica pero al final nos permitirá conocer nuestro primer campo pseudo-exponencial. Iniciemos con algunas definiciones que complementan y dejan más claro los conceptos introducidos en la sección 2.4.

Definición 3.2.1. Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{E}_{est}$ extensión de $\mathfrak{A}$ y $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una variedad algebraica. Diremos que V es **kummer genérica** si para cualquier $\bar{a} \in B^n$ tal que $(\bar{a}, E(\bar{a})) \in B^n \times (B^*)^n$ es genérica en V sobre $\mathfrak{A}$ tenemos que el tipo de los sistemas adecuado de raíces de $E(a_i)$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ es único.

De igual manera a como sucedió en el caso de las variedades libres, ninguna variedad es kummer genérica por vacuidad, ya que siempre es posible encontrar una extensión de campo donde viva un $(\bar{a}, E(\bar{a}))$ genérico en V sobre $\mathfrak{A}$ como veremos a continuación.

Definición 3.2.2. Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ y $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una $n-$variedad algebraica. Diremos que V es **perfectamente rotunda** si V es irreducible, libre, de dimensión n, rotunda y kummer genérica.

Como se puede apreciar en la definición de perfectamente rotunda, una variedad V perfectamente rotunda satisface lo que le pedimos a la variedad en el axioma cinco, pero además es kummer genérica. Para ver la relación entre estos conceptos es preciso dar antes la siguiente definición.

Dada $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una variedad algebraica definiremos para cada $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:

$$V_m := \{(\bar{a}, \bar{b}) \in A^n \times (A^*)^n | (m\bar{a}, b^m) \in V\}$$

Ahora sí con ello en mente estamos en posición de ver la relación entre ambos conceptos.

Teorema 3.2.1. *Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ y $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una variedad irreducible, libre, rotunda de dimensión n definida sobre $\mathfrak{C}$ subcampo de $\mathfrak{A}$ entonces existe $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tal que V_m es perfectamente rotunda definida sobre $\mathfrak{C}$.*

Demostración. Es precisamente lo que afirma el Thumbtack Lema (ver apéndice A), único hecho que desafortundamente no se va a demostrar en este trabajo dado que utiliza técnicas completamente ajenas al mismo de la Teoría de Kummer con las cuales el autor no está familiarizado. La prueba fue hecha por Bays y Zilber en [7]. □

Por lo importante que es que V sea kummer genérica en la contrucción, en lo que sigue lo que haremos será trabajar con variedades perfectamente rotundas. De hecho, lo que haremos será construir un modelo que satisfaga la siguiente afirmación:

Para toda $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ perfectamente rotunda y definida sobre $\mathfrak{A}$ y $C \subseteq_{fin} A$ hay un $(\bar{x}, E(\bar{x})) \in A^n \times (A^*)^n$ tal que es genérico en V sobre $< C >_{\mathfrak{A}}$.

A dicha afirmación la llamaremos **CEA** (Cerradura Exponencial Algebraica) y veremos cómo se relaciona con el axioma cinco con ayuda del teorema anterior.

Ya que hemos introducido dichos conceptos es momento de pasar a una proposición de suma importancia para nuestra construcción.

Proposición 3.2.1. *Dados $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ y $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ libre, irreducible y kummer genérica entonces existen $\mathfrak{B}$ extensión de campo de $\mathfrak{A}$ y $(\bar{a}, \bar{b}) \in B^n \times (B^*)^n$ genérico en V sobre $\mathfrak{A}$, es decir, $\mathbb{I}_A((\bar{a}, \bar{b})) = \mathbb{I}_A(V)$.*

Demostración. Como V es irreducible tenemos que $\mathbb{I}_A(V)$ es primo en $A[x_1, ...x_n, y_1, ..., y_n]$, de donde $A[x_1, ...x_n, y_1, ..., y_n]/\mathbb{I}_A(V)$ es un dominio entero. Por lo que podemos considerar $\mathfrak{B}$ su campo de fracciones, el cual exitende a $\mathfrak{A}$.

Sea $a_i = x_i + \mathbb{I}_A(V)$ y $b_i = y_i + \mathbb{I}_A(V)$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Afirmamos que $\mathbb{I}_A((\bar{a}, \bar{b})) = \mathbb{I}_A(V)$.

Para la primera contención, sea $p(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{I}_A(V)$. Evaluando en $(\bar{a}, \bar{b})$ tenemos que:

$$p(\bar{a},\bar{b}) = p(\bar{x},\bar{y}) + \mathbb{I}_A(V),$$

debido a que $p(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{I}_A(V)$ concluimos que:

$$p(\bar{x},\bar{y}) + \mathbb{I}_A(V) = \mathbb{I}_A(V).$$

Por lo que queda probada la primera contención.

Para la segunda contención, sea $p(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{I}_A((\bar{a},\bar{b}))$; al evaluar en $(\bar{a},\bar{b})$ obtenemos:

$$p(\bar{x},\bar{y}) + \mathbb{I}_A(V) = \mathbb{I}_A(V).$$

Por lo que $p(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{I}_A(V)$.

Por lo tanto, $\mathbb{I}_A((\bar{a},\bar{b})) = \mathbb{I}_A(V)$, es decir, $(\bar{a},\bar{b})$ es genérico en V sobre $\mathfrak{A}$.

□

Con ello estamos casi preparados para continuar nuestra construcción pero antes de ello es necesario introducir una última notación. Dados $\mathfrak{A}$ un campo y $a \in A$ denotaremos por $\sqrt{a}$ al conjunto de todas las raíces de a para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente dada $\bar{a} \in A^n$, denotaremos por $\sqrt{\bar{a}} := \{\sqrt{a_i} | i \in \{1,...,n\}\}$. Es pertinente notar que dicho conjunto es numerable.

Construcción 9. *Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ y $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una variedad irreducible, libre y kummer genérica sobre el campo. Considere $\mathfrak{B}$ extensión de $\mathfrak{A}$ tal que hay $(\bar{a},\bar{b})$ genérico en V sobre $\mathfrak{A}$, sabemos que dicho campo existe por la proposición 3.2.1.*

Considere $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\bar{a},\sqrt{\bar{b}})$. Sea $D_{\mathfrak{C}} = \langle \{a_1,...,a_n\} \cup D_{\mathfrak{A}} \rangle$ y dados $a \in D_{\mathfrak{A}}$ y $1/m\Sigma_{i=1}^{l} n_i a_i$ definamos:

$$E_{\mathfrak{C}}(a + 1/m\Sigma_{i=1}^{l} n_i a_i) = E_{\mathfrak{A}}(a)\Pi_{i=1}^{l} b_{i,m}^{n_i},$$

donde, para cada $i \in \{1,...,n\}$ se tiene que $\{b_{i,m}\}_{m\in\omega}$ es un sistema adecuado de raíces.

Respecto a la construcción anterior hay ciertas cosas que debemos demostrar y donde se verá la importancia de que V sea libre y kummer genérica.

Proposición 3.2.2. *Dado $\mathfrak{C}$ como se construyó en el paso 9 de la construcción tenemos que:*

1. *$E_{\mathfrak{C}}$ está bien definida.*
2. *$E_{\mathfrak{C}}$ es un homomorfismo.*
3. *$\mathfrak{C}$ no extiende el núcleo.*
4. *$\mathfrak{C}$ es numerable.*

Demostración. 1. Sea $c \in D_{\mathfrak{C}}$ tal que $c = a + 1/m\Sigma_{i=1}^{l} n_i a_i$ y $c = a' + 1/s\Sigma_{i=1}^{l} r_i a_i$ tal que $m, s, n_i, r_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y $a, a' \in D_{\mathfrak{A}}$. De donde tenemos que

$$(a - a')ms = \Sigma_{i=1}^{l}(mr_i - sn_i)a_i.$$

Como V es libre de dependencia aditiva se tiene que $mr_i - sn_i = 0$ para todo $i \in \{1,...,l\}$, por lo que en particular $a = a'$. Además, como $\Sigma_{i=1}^{l}(r_i/s - n_i/m)a_i = 0$ se tiene que $(r_i/s - n_i/m) = 0$.

De donde tenemos que:

$$\begin{aligned}
E_{\mathfrak{C}}(a+1/m\Sigma_{i=1}^{l}n_ia_i) =& E_{\mathfrak{A}}(a)\Pi_{i=1}^{l}b_{i,m}^{n_i} && \text{[Definición]}\\
=& E_{\mathfrak{A}}(a')\Pi_{i=1}^{l}b_{i,m}^{n_i} && [a=a']\\
=& E_{\mathfrak{A}}(a')\Pi_{i=1}^{l}b_{i,s}^{r_i} && [r_i/s=n_i/m]\\
=& E_{\mathfrak{C}}(a'+1/s\Sigma_{i=1}^{l}r_ia_i) && \text{[Definición]}
\end{aligned}$$

Por lo que en este caso $E_{\mathfrak{C}}$ se encuentra bien definida.

En caso de que $a, a' = 0$ entonces $E_{\mathfrak{C}}$ se encuentra bien definida debido a que tomamos sistemas de raíces adecuados, la prueba es análoga a la del lema 3.1.1.

2. Es trivial por el hecho de que $E_{\mathfrak{A}}$ es un homorofismo y por la forma en como se definió la exponencial para las combinaciones lineales en $\{a_1, ..., a_n\}$.

3. Supongamos que hay un $c \in D_{\mathfrak{C}} \backslash D_{\mathfrak{A}}$, $c = a + 1/m\Sigma_{i=1}^{l}n_ia_i$, tal que $E_{\mathfrak{C}}(c) = 1$. Por ende, tenemos que:

$$\Pi_{i=1}^{l}b_{i,1}^{n_i} = (E_{\mathfrak{A}}(a))^m$$

Pero como V es libre de dependencia multiplicativa tenemos que $n_i = 0$ para todo $i \in \{1, ..., l\}$. Por lo tanto, $c = a$, es decir, no se extendió el núcleo.

4. Como $\mathfrak{A}$ es numerable tenemos que $A[\bar{x}, \bar{y}]$ también lo es y dado que

$$\mathfrak{A}(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) = \{f(\bar{a}, \bar{b})/g(\bar{a}, \bar{b}) | f, g \in A[\bar{x}, \bar{y}]\}$$

es claro que $\mathfrak{A}(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$ es numerable.

Ahora bien, por el hecho 3.1.1 $(\mathfrak{A}(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n))^a$ es numerable. Note que $\sqrt{b_i} \in (\mathfrak{A}(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n))^a$ para toda $i \in \{1, ...n\}$, ya que $x^l - b_i \in \mathfrak{A}(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)[x]$ para toda $l \in \mathbb{N}$.

De modo que $(\mathfrak{A}(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n))^a$ es una extensión de $\mathfrak{A}$ que contiene a $\{\bar{a}, \sqrt{\bar{b}}\}$. Por lo que por definición $\mathfrak{A}(\bar{a}, \sqrt{\bar{b}})$ es subcampo de $(\mathfrak{A}(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n))^a$, de donde concluimos que $\mathfrak{A}(\bar{a}, \sqrt{\bar{b}})$ es a lo más numerable. Pero dado que extiende a $\mathfrak{A}$ numerable, a $\mathfrak{A}(\bar{a}, \sqrt{\bar{b}})$ no le queda más que ser numerable.

□

Construcción 10. *Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ y V una variedad irreducible, libre y kummer genérica sobre el campo. Considere el campo $\mathfrak{C}$ construido en el paso anterior.*

Ahora bien, definamos $\mathfrak{A}|V := \mathfrak{C}^{ELA}$ [5], la cual llamaremos la extensión de $\mathfrak{A}$ determinada por V.

Corolario 3.2.1. *Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ es numerable y V es una variedad libre y kummer genérica sobre el campo entonces $\mathfrak{A}|V$ es numerable y $\mathfrak{A}|V \in \mathcal{E}_{est}$*

Demostración. Por la proposición anterior $\mathfrak{C}$ es numerable y por la proposición 3.1.9 $\mathfrak{C}^{ELA}$ también es numerable por lo que $\mathfrak{A}|V$ es numerable. Dado que $\mathfrak{A}|V = (\mathfrak{C})^{ELA}$ para un $E-$campo es claro que $\mathfrak{A}|V \in \mathcal{E}_{est}$. □

[5] Ver la construcción 8. en la sección 3.1.

Proposición 3.2.3. *Dados $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ y V una variedad libre y kummer genérica, se tiene que $\mathfrak{A}|V$ es única salvo isomorfismos.*

Demostración. Note que únicamente se hicieron elecciones al momento de tomar los sistemas adecuadas de raíces para las b_i con $i \in \{1, ..., n\}$; pero al ser $(\bar{a}, E(\bar{a}))$ genérico en V sobre $\mathfrak{A}$, por la definición de variedad kummer genérica, el tipo es único. Por lo tanto, $\mathfrak{C}$ es único salvo isomorfismos y por el hecho 3.1.4 $\mathfrak{C}^{ELA}$ es único salvo isomorfismos, es decir, $\mathfrak{A}|V$ es único salvo isomorfismos. □

Antes de pasar a los dos lemas centrales para la construcción es necesario probar una proposición técnica.

Proposición 3.2.4. *Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$, $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una variedad, $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ genérico en V sobre $\mathfrak{A}$ y $M \in Mat_{n\times n}(\mathbb{Z})$ entonces $dim([M]V) = dim(Loc_{\mathfrak{A}}([M](\bar{a}_1, \bar{a}_2)))$.*

Demostración. $\boxed{\geq}$ Sea $M \in Mat_{n\times n}(\mathbb{Z})$ de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & ... & m_{1,n} \\ ... & ... & ... \\ m_{n,1} & ... & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Dados $\bar{a} \in A^n$ y $\bar{b} \in \mathbb{Z}^n$ recordemos que $(a_1, ..., a_n) \bullet (b_1, ..., b_n) = a_1b_1 + ... + a_nb_n$ y $(a_1, ..., a_n) \star (b_1, ..., b_n) = a_1^{b_1} ... a_n^{b_n}$. Note que dado $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ tenemos que:

$$[\begin{pmatrix} m_{1,1} & ... & m_{1,n} \\ ... & ... & ... \\ m_{n,1} & ... & m_{n,n} \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ ... \\ v_{1,n} \\ v_{2,1} \\ ... \\ v_{2,n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \bullet (m_{1,1}, ..., m_{1,n}) \\ ... \\ \bar{v}_1 \bullet (m_{n,1}, ..., m_{n,n}) \\ \bar{v}_2 \star (m_{1,1}, ..., m_{1,n}) \\ ... \\ \bar{v}_2 \star (m_{n,1}, ..., m_{n,n}) \end{pmatrix}$$

Como $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ es genérico en V sobre $\mathfrak{A}$ tenemos que $V = Loc_{\mathfrak{A}}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ por lo que demostraremos que $[M]Loc_{\mathfrak{A}}(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \subseteq Loc_{\mathfrak{A}}([M](\bar{a}_1, \bar{a}_2))$.

Sea $\bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2) \in Loc_{\mathfrak{A}}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ y sea $f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}([M](\bar{a}_1, \bar{a}_2))$. Supongamos que

$$f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = \Sigma q_{i,j} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n} y_1^{j_1} ... y_n^{j_n}.$$

Definamos la función racional $f^{[M]}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ (es racional por la acción multiplicativa ya que estamos tomando coeficientes en los enteros) de la siguiente manera:

- Sustituye x_i en f por $(m_{i,1}, ..., m_{i,n}).(x_1, ..., x_n)$.
- Sustituye y_i en f por $(m_{i,1}, ..., m_{i,n}) \star (y_1, ..., y_n)$.

Sea $g^{[M]}$ el polinomio que se obtiene de $f^{[M]}$ al multiplicar por los posibles denominadores.

Como $f([M](\bar{a}_1, \bar{a}_2)) = 0$ se tiene que $f^{[M]}(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = 0$, lo cual implica que $g^{[M]}(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = 0$. De donde concluimos que $g^{[M]} \in \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ y como $\bar{c} \in Loc_{\mathfrak{A}}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ llegamos a que $g^{[M]}(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = 0$ y dividiendo por todo aquello que multiplicamos nos queda que $f^{[M]}(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = 0$. Por ende $f([M](\bar{c}_1, \bar{c}_2)) = 0$.

Por lo tanto,

$$[M](\bar{c}_1, \bar{c}_2) \in Loc_{\mathfrak{A}}([M](\bar{a}_1, \bar{a}_2)).$$

De ahí que $[M]Loc_{\mathfrak{A}}(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \subseteq Loc_{\mathfrak{A}}([M](\bar{a}_1, \bar{a}_2))$ y que

$$dim([M]V) = dim([M]Loc_{\mathfrak{A}}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)) \leq dim(Loc_{\mathfrak{A}}([M](\bar{a}_1, \bar{a}_2))).$$

$\boxed{\leq}$ De manera análoga a como se demostró la desigualdad anterior se puede probar que:

$$\mathbb{I}_{\mathfrak{A}}([M](\bar{a}_1, \bar{a}_2)) \subseteq \mathbb{I}_{\mathfrak{A}}([M]Loc_{\mathfrak{A}}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)).$$

Como por definición $Loc_{\mathfrak{A}}[M](\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ es la mínima variedad que contiene a $\mathbb{I}_{\mathfrak{A}}([M](\bar{a}_1, \bar{a}_2))$, concluimos que:

$$Loc_{\mathfrak{A}}([M](\bar{a}_1, \bar{a}_2)) \subseteq [M]Loc_{\mathfrak{A}}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)).$$

Por lo tanto,

$$dim(Loc_{\mathfrak{A}}([M](\bar{a}_1, \bar{a}_2)) \leq dim([M]V).$$

□

En este momento es donde entra en juego la noción de que una variedad sea rotunda.

Lema 3.2.1. *Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ y $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}|V$ para V libre y kummer genérica entonces la extesión es fuerte sii V es rotunda.*

Demostración. $\boxed{\rightarrow}$ Sea $\bar{a}$ una $n-$tupla tal que $(\bar{a}, E(\bar{a}))$ es genérica en V sobre $\mathfrak{A}$, genera $\mathfrak{A}|V$ y sea $M \in Mat_{n\times n}(\mathbb{Z})$. Note que por ser $(\bar{a}, E(\bar{a}))$ genérico y por ser V libre de dependencia aditiva se tiene que $\bar{a}$ es linealmente independiente sobre $\mathfrak{A}$, por lo que es sencillo demostrar que $rg(M) = lin(M\bar{a}) = lin(M\bar{a}/\mathfrak{A})$.

Note que como E lleva la estructura aditiva a la estructura multiplicativa se tiene que:

$$(M\bar{a}, E(M\bar{a})) = [M](\bar{a}, E(\bar{a})).$$

Luego dado que $(M\bar{a}, E(M\bar{a})) \in [M]V$ se tiene por la proposición anterior que:

$$dim(Loc_{\mathfrak{A}}(M\bar{a}, E(M\bar{a}))) \leq dim([M]V),$$

de donde:

$$dim([M]V) - rg(M) \geq dim(Loc_{\mathfrak{A}}(M\bar{a}, E(M\bar{a}))) - lin(M\bar{a}/\mathfrak{A}).$$

Debido a que por la proposición 1.3.4 sabemos que $dim(Loc_{\mathfrak{A}}(M\bar{a}, E(M\bar{a}))) = tr(M\bar{a} \cup E(M\bar{a})/\mathfrak{A})$:

$$dim([M]V) - rg(M) \geq tr(M\bar{a} \cup E(M\bar{a})/\mathfrak{A}) - lin(M\bar{a}/\mathfrak{A}) = \delta(M\bar{a}/\mathfrak{A})$$

Como $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}|V$ y $D_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ por definición de ser subestructura fuerte concluimos que:

$$\delta(M\bar{a}/\mathfrak{A}) \geq 0.$$

Por lo que:

$$dim([M]V) \geq rg(M).$$

Por lo tanto, V es rotunda.

$\boxed{\leftarrow}$ Sea $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ una $n-$tupla tal que $(\bar{a}, E(\bar{a}))$ es genérica en V sobre $\mathfrak{A}$. Considere a $\mathfrak{C}$ como se construyó en la construcción 9. Sea $\bar{c} = (c_1, ..., c_n) \in D_{\mathfrak{C}}$. Note que por definición $D_{\mathfrak{C}} = \langle D_{\mathfrak{A}} \cup \{\bar{a}\}\rangle$.

Lo cual implica que $\{a_i + \mathfrak{A}\}_{i\in\{1,...,n\}}$ genera $D_{\mathfrak{C}}/\mathfrak{A}$ como espacio vectorial, por lo tanto hay $q_{i,1}, ..., q_{i,n} \in \mathbb{Q}$ tales que para toda $i \in \{1, ..., n\}$

$$c_i + \mathfrak{A} = \Sigma_{j\in\{1,...,n\}} q_{i,j}(a_j + \mathfrak{A}) = (1/m)\Sigma_{j\in\{1,...,n\}} m_{i,j}(a_j + \mathfrak{A})$$

para algún $m \in \mathbb{Z}$ y $m_{i,j} \in \mathbb{Z}$ para toda $j \in \{1, ..., n\}$. De donde llegamos que:

$$\bar{c} + \mathfrak{A} = 1/m \begin{pmatrix} m_{1,1} & ... & m_{1,n} \\ ... & ... & ... \\ m_{n,1} & ... & m_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} + \mathfrak{A}$$

Por lo que $\langle M\bar{a}\rangle/\mathfrak{A} = \langle\bar{c}\rangle/\mathfrak{A}$. De donde por el lema 2.1.2 se tiene que $\delta(\bar{c}/\mathfrak{A}) = \delta(M\bar{a}/\mathfrak{A})$. Pero por definición:

$$\delta(M\bar{a}/\mathfrak{A}) = tr(M\bar{a} \cup E(M\bar{a})/\mathfrak{A}) - lin(M\bar{a}/\mathfrak{A}).$$

De donde como $tr(M\bar{a} \cup E(M\bar{a})/\mathfrak{A}) = dim(loc_{\mathfrak{A}}([M](\bar{a}, E(\bar{a}))))$ y como por un razonamiento análogo al hecho en la ida tenemos que $lin(M\bar{a}/\mathfrak{A}) = rg(M)$:

$$\delta(M\bar{a}/\mathfrak{A}) = dim(loc_{\mathfrak{A}}([M](\bar{a}, E(\bar{a})))) - rg(M).$$

Por la proposición anterior y dado que V es rotunda, llegamos a que:

$$\delta(M\bar{a}/\mathfrak{A}) = dim([M]V) - rg(M) \geq 0.$$

Por ende $\delta(\bar{c}/\mathfrak{A}) \geq 0$ y como $E_{\mathfrak{C}} \restriction_{D_{\mathfrak{A}}} = E_{\mathfrak{A}}$ concluimos que $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{C}$. Pero ya que $\mathfrak{C}^{ELA} = \mathfrak{A}|V$ y que $\mathfrak{C} \precsim \mathfrak{C}^{ELA}$ por el corolario 3.1.1 podemos concluir que $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}|V$.

$\square$

El siguiente hecho es importante únicamente para demostrar la unicidad de la construcción y no para demostrar la existencia de un modelo debido a ello únicamente lo enunciaremos. La prueba del mismo se encuentra en [17] al igual que el hecho 3.1.4.

Hecho 3.2.1. *Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ numerable. Si $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ y $W \subseteq A^l \times (A^*)^n$ son dos variedades libres y kummer genéricas sobre $\mathfrak{A}$ entonces*

$$(\mathfrak{A}|V)|W \cong (\mathfrak{A}|W)|V \cong \mathfrak{A}|(W \times V).$$

Antes de pasar al último paso de nuestra construcción queda un último detalle técnico que debemos demostrar.

Definamos $\mathcal{V}$ como el conjunto de tercias $(n, V, \mathfrak{B})$ tales que:

1. $n \in \mathbb{N}$.
2. $\mathfrak{B}$ es un subcampo finitamente generado de $\mathfrak{A}$ donde V está definida.
3. V es una variedad perfectamente rotunda tal que no existe $(\bar{c}, E_{\mathfrak{A}}(\bar{c}))$ genérico en V sobre $\mathfrak{B}$.

Proposición 3.2.5. *Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ numerable tal que $\mathfrak{A}$ no satisface CEA entonces $\mathcal{V}$ es a lo más numerable.*

Demostración. Lo que haremos será demostrar que cada una de las entradas es a lo más numerable y con ello tendremos que la cardinalidad de $\mathcal{V}$ es menor a $\aleph_0 \times \aleph_0 \times \aleph_0$ que como sabemos es biyectable con $\aleph_0$.

Respecto a la tercera entrada, note que como A es numerable para toda $n \in \mathbb{N}$ $A[x_1, ..., x_n]$ es numerable, por lo que $A_x = \bigcup_{n\in\omega} A[x_1, ..., x_n]$ es numerable. Dado que toda variedad está determinada por un número finito de polinomios por el Teorema de las Base de Hilbert, el número de variedades es biyectable con $\mathcal{P}^\omega(A_x)$. La cual sabemos que es numerable al ser A_x numerable. Por ende, las variedades que nos interesan son a lo más numerables.

Por último, los subcampos finitamente generados de A son biyectables con $\mathcal{P}^\omega(A)$, pero dado que A es numerable la potencia finita es numerable. Por ende, los campos finitamente generados que nos interesan son a lo más numerables.

Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es a lo más numerable. □

Con eso en mente pasemos al último paso de nuestra construcción.

Construcción 11. *Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ numerable y supongamos que $\mathfrak{A}$ no satisface CEA. Hagamos la contrucción por doble recursión.*

- *Fijamos una identificación de $\mathcal{V}$ con ω, de la siguiente manera $\{(n^1_\alpha, V^1_\alpha, \mathfrak{B}^1_\alpha)\}_{\alpha<\beta}$, con $\beta \leq \omega$. Note que por la proposición anterior tiene sentido enumerar a dichas tercias con β. Ahora bien, definamos:*
    - $\mathfrak{A}^1_0 := \mathfrak{A}$
    - $\mathfrak{A}^1_1 := \mathfrak{A}|V_1$
    - $\mathfrak{A}^1_{n+1} := \mathfrak{A}^1_n|V_{n+1}$.

  Con ello definamos $\mathfrak{A}^1 := \bigcup_{n\in\beta} \mathfrak{A}^1_n$. [6]

- *Para construir a $\mathfrak{A}^{n+1}$ considere dos casos:*
    1. *Si $\mathfrak{A}^n$ satisface CEA, definamos $\mathfrak{A}^{n+1} = \mathfrak{A}^n$.*
    2. *Si $\mathfrak{A}^n$ no satisface CEA, hagamos una construcción análoga a la que se realizó para construir $\mathfrak{A}^1$ sólo que ahora las variedades V son definidas sobre $\mathfrak{A}^n$ y los subcampos $\mathfrak{B}$ son subcampos $\mathfrak{A}^n$.*

Con ello definamos $\mathfrak{A}^{CEA} := \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}^n$.

Nos gustaría destacar algunos hechos de la contrucción, los cuales debido a su importancia los dividiremos en cuatro proposiciones.

Proposición 3.2.6. *Para cada $n \in \omega$ se tiene que $\mathfrak{A}^n \in \mathcal{E}_{est}$. Más aún $\mathfrak{A}^{CEA} \in \mathcal{E}_{est}$*

Demostración. La prueba se realiza por inducción sobre n, utilizando el corolario 3.2.1 y utilizando el hecho de que $\mathcal{E}_{est}$ es cerrado bajo uniones de cadena. □

[6] Notemos que la construcción no depende del orden por el hecho 3.2.1.

Proposición 3.2.7. *Dado $\mathfrak{A}$ como lo pide la contrucción 11 se tiene que $\mathfrak{A}^{CEA}$ es único salvo isomorfismos.*

Demostración. La prueba se sigue de los hechos 3.1.4 y 3.2.1, únicas afirmaciones importantes no demostradas en este capítulo. □

Proposición 3.2.8. *Dado $\mathfrak{A}$ como lo pide la contrucción 11 se tiene que $\mathfrak{A}^{CEA}$ satisface CEA.*

Demostración. Sea V una variedad perfectamente rotunda en $\mathfrak{A}^{CEA}$ definible en $\mathfrak{B}$ subcampo finitamente generado de $\mathfrak{A}^{CEA}$. Como $\mathfrak{A}^{CEA} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}^n$ se tiene que V es una variedad perfectamente rotunda de $\mathfrak{A}^i$ para alguna $i \in \omega$ y $\mathfrak{B}$ es subcampo finitamente generado de algún $\mathfrak{A}^j$.

Por lo que V y $\mathfrak{B}$ cumplen lo deseado en $\mathfrak{A}^{max\{i,j\}}$ y por el paso $max\{i,j\}$ de la construcción se tiene que hay $(\bar{c}, E_{\mathfrak{A}^{CEA}}(\bar{c}))$ genérico en V sobre $\mathfrak{B}$.

□

Proposición 3.2.9. *Dado $\mathfrak{A}$ como lo pide la contrucción 11 se tiene que $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}^{CEA}$.*

Demostración. Utilizando el lema 3.2.1 y la proposición 2.2.1 es claro que:

$$\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}^1 \precsim \mathfrak{A}^2 \precsim ...$$

De nuevo por la proposición 2.2.1, concluimos que:

$$\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{A}^{CEA}.$$

□

Las proposiciones anteriores nos hacen ver que $\mathfrak{A}^{CEA}$ cumple con lo que nos gustaría, ya sólo queda un último detalle que es precisamente lo que enuncia la siguiente proposición.

Proposición 3.2.10. *Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}_{est}$ numerable entonces $\mathfrak{A}^{CEA}$ es numerable.*

Demostración. La prueba se hace por doble inducción, utilizando el corolario 3.2.1, el hecho de que tenemos un número numerable de tercias y que la unión numerable de conjuntos numerable es numerable. □

Antes de dar nuestro modelo queda por demostrar el detalle mencionado al inicio, que es precisamente la relación entre CEA y el axioma V.

Lema 3.2.2. *Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$ tal que satisface CEA entonces $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, es decir, $\mathfrak{A}$ satisface el axioma V.*

Demostración. Sean $B \subseteq_{fin} A$ y $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una variedad irreducible, libre y rotunda definida sobre $< B >_{\mathfrak{A}}$ tal que $dim(V) = n$. Por el teorema 3.2.1 existe un $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tal que V_m es perfectamente rotunda de dimensión n y tal que se encuentra definida sobre $< B >_{\mathfrak{A}}$.

Como $\mathfrak{A}$ satisface CEA existe un $(\bar{g}, E(\bar{g})) \in A^n \times (A^*)^n$ tal que es genérico en V_m sobre $< B >_{\mathfrak{A}}$, es decir,

$$\mathbb{I}_{<B>_{\mathfrak{A}}}(V_m) = \mathbb{I}_{<B>_{\mathfrak{A}}}(\bar{g}, E(\bar{g})).$$

Afirmamos que $(m\bar{g}, E(\bar{g})^m) \in A^n \times (A^*)^n$ es genérico en V sobre $< B >_{\mathfrak{A}}$. Probemos que

$$\mathbb{I}_{<B>_{\mathfrak{A}}}(V) = \mathbb{I}_{<B>_{\mathfrak{A}}}(m\bar{g}, E(\bar{g})^m).$$

$\boxed{\subseteq}$ Sea $p(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in \mathbb{I}_{<B>_{\mathfrak{A}}}(V)$. Definamos $p^m(\bar{x}, \bar{y}) := p(m\bar{x}, \bar{y}^m)$, note que claramente $p^m \in A[\bar{x}, \bar{y}]$ y que $p^m(\bar{a}, \bar{b}) = p(m\bar{a}, \bar{b}^m)$. Dado $(\bar{a}, \bar{b}) \in V_m$ entonces $(m\bar{a}, \bar{b}^m) \in V$ y como $p \in \mathbb{I}_{<B>_{\mathfrak{A}}}(V)$, tenemos:

$$p^m(\bar{a}, \bar{b}) = p(m\bar{a}, \bar{b}^m) = 0.$$

Por ende $p^m(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{I}_{<B>_{\mathfrak{A}}}(V_m)$. De donde como $\mathbb{I}_{<B>_{\mathfrak{A}}}(V_m) = \mathbb{I}_{<B>_{\mathfrak{A}}}(\bar{g}, E(\bar{g}))$ concluimos que $p^m(\bar{g}, E(\bar{g})) = 0$, pero $p^m(\bar{g}, E(\bar{g})) = p(m\bar{g}, E(m\bar{g}))$. Lo cual implica que $p(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{I}_{<B>_{\mathfrak{A}}}(m\bar{g}, E(\bar{g})^m)$.

$\boxed{\supseteq}$ Se hace de manera análoga realizando la misma transformación.

Por lo tanto, $(m\bar{g}, E(m\bar{g}))$ es genérico en V sobre $< B >_{\mathfrak{A}}$. Por lo cual $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$.

□

Después de tanto trabajo estamos preparados para dar nuestro primer modelo.

Teorema 3.2.2. $\mathfrak{NE} := ((\mathfrak{N})^{ELA})^{CEA}$ *es un campo pseudo-exponencial, es decir,* $\mathfrak{NE} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$.

Demostración. Ya hemos hecho todo el trabajo pero recapitulemos. Recordemos que $\mathfrak{N}$ es el $E-$campo con núcleo estándar construido por medio del paso dos de nuestra construcción. Por el teorema 3.1.1 $(\mathfrak{N})^{ELA} \in \mathcal{E}_{est}$ y es numerable. Por lo que por la proposición 3.2.6 $\mathfrak{NE} \in \mathcal{E}_{est}$.

Luego por la proposición 3.1.1 $\mathfrak{A}_0 \precsim \mathfrak{N} \precsim (\mathfrak{N})^{ELA}$ y por la proposición 3.2.9 $(\mathfrak{N})^{ELA} \precsim \mathfrak{NE}$ por lo que por transitividad

$$\mathfrak{A}_0 \precsim \mathfrak{NE}$$

y por la proposición 3.1.2 $\mathfrak{NE}$ satisface la propiedad de Schanuel. Por ende, $\mathfrak{NE} \in \mathcal{E}_{est,sch}$.

Como $\mathfrak{NE}$ es numerable, la cerradura de cualquier conjunto finito es a lo más numerable y por ende $\mathfrak{NE} \in \mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$.

Por último, por la proposición 3.2.8 tenemos que $\mathfrak{NE}$ satisface CEA y por el lema 3.2.2 ello implica que $\mathfrak{NE}$ satisface el axioma V.

Por lo tanto, $\mathfrak{NE} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$. □

Por lo tanto, se tiene que $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch} \neq \emptyset$ y que $T_{\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}}$ es consistente. Con ello terminamos con este capítulo, es momento de pasar a estudiar lo que es una pregeometría y lo que es una clase cuasiminimal excelente. [7]

Observación 5. *Note que la construcción de $\mathfrak{NE}$ no depende de ninguno de los hechos enunciados en el capítulo. Dichos hechos únicamente son necesarios para la prueba de que $\mathfrak{NE}$ es único. La razón por la cual decidimos enunciarlos es para hacer notar al lector que la construcción está bien hecha. De hecho, podría construirse un modelo sin la necesidad de tocar las variedades kummer genéricas y el thumbtack lemma pero dicho modelo no sería único.*

[7] Ver el apéndice C para la construcción de un modelo de dimensión infinita, la definición de dimensión utilizada es la definición 4.1.3.

Capítulo 4

Clases Cuasiminimal Excelentes

En este capítulo estudiaremos las clases cuasiminimal excelentes, pues como veremos en el próximo capítulo $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ es una clase cuasiminimal excelente. El teorema fundamental de este capítulo es el siguiente:

Teorema*. *Si $\mathcal{C}$ es una clase cuasiminimal excelente definida por $T_{\mathcal{C}}$ en $L_{\omega_1,\omega}$ excepto CN[1], el operador cerradura es definible en $L_{\omega_1,\omega}$ y tiene un modelo de dimensión infinita entonces $\mathcal{C}$ es no numerable categórica.*

Cabe mencionar que por no numerable categórica nos referimos a que para todo κ no numerable hay un único modelo de cardinalidad κ. La prueba del teorema se realizará en dos partes, en la primera demostraremos que a lo más hay uno y para eso sólo necesitamos la hipótesis de que $\mathcal{C}$ sea cuasiminimal excelente y en la segunda se probará la existencia del modelo de cualquier cardinalidad no numerable bajo las hipótesis del teorema.

Para ello será necesario en un primer momento estudiar lo que es una pregeometría para más tarde introducir el concepto de clase cuasiminimal excelente y comenzar a demostrar ciertos lemas que desembocarán en nuestro teorema.

4.1. Pregeometrías cerradas numerables

Definición 4.1.1. Una **pregeometría** es una pareja ordenada $\langle \mathfrak{A}, cl_{\mathfrak{A}} \rangle$ donde $\mathfrak{A}$ es una estructura y $cl_{\mathfrak{A}}$ es un operador en A, $cl_{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, tal que cumple:

1. Si $C \subseteq A$ entonces $C \subseteq cl_{\mathfrak{A}}(C)$ y $cl_{\mathfrak{A}}(cl_{\mathfrak{A}}(C)) = cl_{\mathfrak{A}}(C)$.

2. Si $C \subseteq B \subseteq A$ entonces $cl_{\mathfrak{A}}(C) \subseteq cl_{\mathfrak{A}}(B)$.

3. (Principio del intercambio) Si $C \subseteq A$ y $a, b \in A$ y $a \in cl_{\mathfrak{A}}(C \cup \{b\})$ entonces $a \in cl_{\mathfrak{A}}(C)$ o bien $b \in cl_{\mathfrak{A}}(C \cup \{a\})$.

4. (Principio de finitud) Si $C \subseteq A$ y $c \in cl_{\mathfrak{A}}(C)$ entonces hay $C_0 \subseteq_{fin} C$ tal que $c \in cl_{\mathfrak{A}}(C_0)$.

[1] Lo que se entiende por CN es parte de la definición 4.1.1.

5. (Cerradura numerable, CN [2]) Si $C \subseteq_{fin} A$ entonces $cl_{\mathfrak{A}}(C)$ es numerable.

Dado que la notación $cl_{\mathfrak{A}}$ está muy cargada en caso de que no se preste a confusiones utilizaremos únicamente cl.

Diremos que $C \subseteq A$ es cerrado sii $C = cl(C)$. Para familiarizarnos un poco con lo que son las pregeometrías daremos algunos ejemplos y demostraremos algunos lemas que nos serán útiles en las próximas secciones.

Ejemplos. 1. La cerradura trivial es una preogeometría, es decir, dado $\mathfrak{A}$ y $C \subseteq A$ si definimos $cl(C) := C$ obtenemos una pregeometría.

2. Sea $\mathfrak{A}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, si dado $C \subseteq A$ definimos $cl(C) := \langle C \rangle$ entonces $\langle \mathfrak{A}, cl \rangle$ es una pregeometría.

   Es fácil ver que 1. y 2. de la definición se cumplen. El principio de intercambio se satisface dado que si $a \in \langle X \cup \{b\} \rangle$ y $a \notin \langle X \rangle$ entonces:

$$a = \Sigma_{i=1}^{n} q_i x_i + q_{n+1} b,$$

   para algún $q_{n+1} \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ y despejando obtenemos que:

$$b = \Sigma_{i=1}^{n} (-q_i/q_{n+1}) x_i + (1/q_{n+1}) a,$$

   es decir, $b \in \langle X \cup \{a\} \rangle$.

   El principio de finitud se sigue del caracter finito de las combinaciones lineales y CN del hecho de que nuestro campo es numerable.

3. Sea $\mathfrak{A}$ un modelo fuertemente minimal[3] numerable (un ejemplo de ello sería un campo algebraicamente cerrado). Decimos que $b \in A$ es *algebraico* sobre $C \subseteq A$ si hay una fórmula $\phi(v; \bar{w})$ en $L_{\omega,\omega}$ y $\bar{c} \in C^n$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \phi[b; \bar{c}]$ y $\{a \in A | \mathfrak{A} \vDash \phi[a; \bar{c}]\}$ es finito. Con ello, dado $C \subseteq A$ definamos:

$$acl(C) = \{a \in A | a \text{ es algebraico sobre } C\}.$$

   Afirmamos que $< \mathfrak{A}, acl >$ es una pregeometría. Una prueba de dicho hecho se encuentra en [21].

Lema 4.1.1. *El axioma 4. es equivalente a* $cl(C) = \bigcup_{X \subseteq_{fin} C} cl(X)$ *para todo* $C \subseteq A$.

Demostración. $\boxed{\rightarrow}$ $\subseteq\lrcorner$ Sea $c \in cl(C)$, por hipótesis hay un $C_0 \subseteq_{fin} C$ tal que $c \in cl(C_0)$. Por ende por la defnición de unión $c \in \bigcup_{X \subseteq_{fin} C} cl(\mathrm{X})$, con lo que queda probada la contención.
$\supseteq\lrcorner$ Por 2. de la definición de pregeometría tenemos que dado $X \subseteq_{fin} C$ entonces $cl(X) \subseteq cl(\mathrm{C})$ y por tanto por la definición de unión hemos acabado.

$\boxed{\leftarrow}$ Trivial utilizando la definición de unión. □

A partir de ahora utilizaremos **principio de finitud** para referirnos a cualquiera de los dos conceptos.

[2] Se puede trabajar en pregeometrías sin CN pero es más sencillo trabajar con CN y lo necesitaremos para nuestro teorema.

[3] Recuerde que un modelo es fuertemente minimal si dado $X \subseteq A$ definible en $L_{\omega,\omega}$ se tiene que X o $A \backslash X$ es finito.

Lema 4.1.2. *Dados $B, C \subseteq A$ tenemos que $cl(A \cup B) = cl(cl(A) \cup cl(B))$.*

Demostración. $\boxed{\subseteq}$ Por 1. de la definición de pregeometría tenemos que $A \cup B \subseteq cl(A) \cup cl(B)$, ya que cl es monótono $cl(A \cup B) \subseteq cl(cl(A) \cup cl(B))$.

$\boxed{\supseteq}$ Como $A \subseteq A \cup B$ y ya que cl es monótono tenemos que $cl(A) \subseteq cl(A \cup B)$. De manera análoga tenemos que $cl(B) \subseteq cl(A \cup B)$. Dado que $cl(A) \cup cl(B) \subseteq cl(A \cup B)$ y que cl es monótono se tiene que:

$$cl(cl(A) \cup cl(B)) \subseteq cl(cl(A \cup B)),$$

de donde por el iniciso 1. de la definición de pregeometría $cl(cl(A \cup B)) = cl(A \cup B)$, con lo que queda demostrada la contención. □

Lema 4.1.3. *Si $C \subseteq A$ es infinito entonces $|cl(C)| = |C|$.*[4]

Demostración. Por el principio de finitud tenemos que $cl(C) = \bigcup_{X \subseteq_{fin} C} cl(X)$ y dado que contamos con CN para todo $X \subseteq_{fin} C$ tenemos que $|cl(X)| \leq \aleph_0$. De donde,

$$\begin{aligned}
\left| \bigcup_{X \subseteq_{fin} C} cl(X) \right| &\leq \Sigma_{X \subseteq_{fin} C} |cl(X)| && \text{[Al no ser necesariamente ajenos]} \\
&\leq \Sigma_{X \subseteq_{fin} C} \aleph_0 && \text{[Por CN]} \\
&= |\mathcal{P}^{<\omega}(C)| \aleph_0 = |C| \aleph_0 && \text{[Propiedades básicas de la aritmética cardinal]} \\
&= max\{|C|, \aleph_0\} = |C| && \text{[Al ser } C \text{ infinito]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $|cl(C)| \leq |C|$. La otra desigualdad se sigue de 1. de la definición. De ahí que $|cl(C)| = |C|$. □

La razón por la cual nos interesa estudiar las pregeometrías es por el hecho de que tienen una noción de dimensión, la cual nos premitirá construir isomorfismos. Para llegar a la definición de base es necesaria la noción de independencia.

Definición 4.1.2. Diremos que $C \subseteq A$ es independiente si para todo $c \in C$ tenemos que $c \notin cl(C \backslash \{c\})$.

Definición 4.1.3. Diremos que $C \subseteq A$ es **base** de $\mathfrak{A}$ si C es independiente y $A \subseteq cl(C)$. De la manera usual, diremos que la dimensión de $\mathfrak{A}$ es igual al tamaño de cualquiera de sus bases.

Para que la noción de dimensión esté bien definida es necesario demostrar que todo modelo tiene una base y que cualesquiera dos bases son biyectables, lo cual demostraremos en los siguientes tres lemas.

Lema 4.1.4. *Si D es independiente, $D \subseteq C$ y $c \in C$ tal que $c \notin cl(D)$ entonces para toda $d \in D$ tenemos que $d \notin cl((D \backslash \{d\}) \cup \{c\})$.*

Demostración. En miras de obtener una contradicción, supongamos que hay un $d \in cl((D \backslash \{d\}) \cup \{c\})$ entonces como D es independiente $d \notin cl(D \backslash \{d\})$ y por lo tanto por el principio de intercambio $c \in cl(D)$, contradiciendo la hipótesis. □

[4] Para este resultado es necesario CN.

Lema 4.1.5. *Dada $\langle \mathfrak{A}, cl_{\mathfrak{A}} \rangle$ pregeometría existe B tal que B es base de $\mathfrak{A}$.*

Demostración. Lo haremos en 2 casos:

1. **Caso 1:** $(cl(\emptyset) = A)$ Entonces $B = \emptyset$ es la base buscada.

2. **Caso 2:** $(cl(\emptyset) \neq A)$ Sea $a \in A \backslash cl(\emptyset)$ por lo que $\{a\}$ es independiente. La prueba se hará utilizando el lema de Zorn. Definamos:

$$CP := \{X \subseteq A | X \text{ es independiente y } \{a\} \subseteq X \subseteq A\}.$$

   Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una cadena en CP, afirmamos que $\bigcup_{i \in I} C_i$ es cota superior tal que $\bigcup_{i \in I} C_i \in CP$. Claramente es cota, sólo queda ver que es independiente.

   Supongamos que no, entonces hay un $c \in \bigcup_{i \in I} C_i$ tal que $c \in cl(\bigcup_{i \in I} C_i \backslash \{c\})$. Por el principio de finitud, hay un $C_0 \subseteq_{fin} \bigcup_{i \in I} C_i \backslash \{c\}$ tal que $c \in cl(C_0)$. Dado que $C_0 \cup \{c\}$ es finito y tenemos una cadena, hay un C_j tal que $C_0 \cup \{c\} \subseteq C_j$. Pero ello implica, dado que cl es monotona, que $c \in cl(C_j \backslash \{c\})$. Lo cual es una contradicción con la independencia de C_j.

   De donde por el lema de Zorn tenemos un B maximal. Note que dado que $B \in CP$ es independiente, solo queda observar que genera. Supongamos que no, entonces hay un $b \in A \backslash cl(B)$ tal que $B \cup \{b\} \supset B$. Por un argumento análogo al del lema anterior, con $D = B$ y $C = B \cup \{b\}$, se obtiene que $B \cup \{b\} \in CP$; lo cual contradice la maximalidad de B. Por lo tanto, B es la base buscada.

□

De manera análoga a la prueba anterior es posible extender a todo conjunto independiente a una base.

Lema 4.1.6. *Sean $B, C \subseteq A$ independientes tales que $C \subseteq cl(B)$ entonces:*

1. *Para cualesquiera $C_0 \subseteq C$ y $B_0 \subseteq B$ tales que $C_0 \cup B_0$ es base de $cl(B)$ y $c \in C \backslash C_0$ entonces hay un $b \in B_0$ tal que $C_0 \cup \{c\} \cup (B_0 \backslash \{b\})$ es base de $cl(B)$.*

2. *$|C| \leq |B|$.*

3. *Si B y C son bases de $\mathfrak{A}$ entonces $|C| = |B|$.*

Demostración. 1. Sea $c \in C \backslash C_0$, como C es independiente, $C \subseteq cl(B)$ y $C_0 \cup B_0$ es base de $cl(B)$ entonces hay un $D \subseteq B_0$, tal que $|D| \geq 1$ y $c \in cl(D \cup C_0)$. Sea D_0 de cardinalidad mínima, note que por el principio de finitud D_0 es finito.

   Ahora bien, por la minimalidad de D_0, para todo $d \in D_0$ se tiene que $c \notin cl(C_0 \cup (D_0 \backslash \{d\}))$, lo cual por principio de intercambio implica que $d \in cl(C_0 \cup \{c\} \cup (D_0 \backslash \{d\}))$.

   Sea $b \in D_0$, dado que $D_0 \subseteq B_0$ por ende

$$b \in cl(C_0 \cup \{c\} \cup (D_0 \backslash \{b\})) \subseteq cl(C_0 \cup \{c\} \cup (B_0 \backslash \{b\})).$$

   Note que debido a ello se tiene que:

$$C_0 \cup B_0 = C_0 \cup (B_0 \backslash \{b\}) \cup \{b\} \subseteq cl(C_0 \cup \{c\} \cup (B_0 \backslash \{b\})).$$

Por lo que por la monotoneidad y el hecho de que $C_0 \cup B_0$ es base $cl(B)$ se tiene que:

$$cl(B) = cl(C_0 \cup B_0) = cl(C_0 \cup \{c\} \cup (B_0 \backslash \{b\})).$$

Por lo tanto, $C_0 \cup \{c\} \cup (B_0 \backslash \{b\})$ genera, ya sólo queda observar que el conjuto es independiente. Afirmamos que $c \notin cl(C_0 \cup (B_0 \backslash \{b\}))$ ya que si no:

$$(B_0 \backslash \{b\}) \cup C_0 \cup \{c\} \subseteq cl(C_0 \cup B_0 \backslash \{b\}),$$

de donde por idempotencia y monotoneidad se tendría que:

$$cl((B_0 \backslash \{b\}) \cup C_0 \cup \{c\}) \subseteq cl(C_0 \cup (B_0 \backslash \{b\})).$$

Y dado que por construcción $b \in cl(B_0 \backslash \{b\} \cup C_0 \cup \{c\})$, ello implicaría que $b \in cl(C_0 \cup (B_0 \backslash \{b\}))$, contradiciendo la independencia de $C_0 \cup B_0$ y por el el lema 4.1.4 hemos terminado tomando a $D = C_0 \cup (B_0 \backslash \{b\})$.

2. Haremos dos caso:

   a) **Caso 1:** (B finito) Procedamos por contradicción. Supongamos que B es finito de tamaño n y sean $\{c_1, ..., c_{n+1}\} \subseteq C$. Aplicando 1. a $C_0 = \emptyset$ y $B_0 = B$ n-veces, llegamos a que hay $b_1, ..., b_n$ tal que

   $$\{c_1, ..., c_n\} \cup B \backslash \{b_1, ..., b_n\} = \{c_1, ..., c_n\}$$

   es base de $cl(B)$ y como por hipótesis $C \subseteq cl(B)$ entonces $c_{n+1} \in cl(\{c_1, ..., c_n\})$ contradiciendo la independencia de C. Por lo tanto, si B es finito entonces $|C| \leq |B|$.

   b) **Caso 2:**(B infinito) Como por hipótesis tenemos que $C \subseteq cl(B)$, por ende $|C| \leq |cl(B)|$, y dado que B es infinito, por el lema 4.1.3 $|cl(B)| = |B|$, por lo que hemos terminado.

3. Se sigue trivialemente de 2., ya que al ser C y B bases de $\mathfrak{A}$ se tiene que son independientes y que $C \subseteq cl(B)$ y que $B \subseteq cl(C)$.

□

Un último hecho que sólo es cierto en pregeometrías con CN y que nos será sumamente importante es lo que menciona la siguiente corolario.

Corolario 4.1.1. *Sea $\langle \mathfrak{A}, cl_{\mathfrak{A}} \rangle$ una pregeometría tal que $|A| > \aleph_0$ entonces cualquier base de A es biyectable con A.*

Demostración. Se sigue directo del lema 4.1.3. □

Definición 4.1.4. Si $\langle \mathfrak{A}, cl_{\mathfrak{A}} \rangle$ es una pregeometría y $B \subseteq A$ numerable, $\langle \mathfrak{A}, cl^B_{\mathfrak{A}} \rangle$ es la **pregeometría relativa** respecto a B donde $cl^B_{\mathfrak{A}}(X) = cl_{\mathfrak{A}}(X \cup B)$ para todo $X \subseteq A$.

Queda ver que en realidad es una pregeometría pero el resultado es trivial. Cabe destacar que si trabajamos en pregeometrías sin CN, no es necesaria la hipótesis de numerabilidad sobre B.

Definición 4.1.5. Dado $D \subseteq A$ diremos que D es independiente sobre B si D es independiente en $\langle \mathfrak{A}, cl^B_{\mathfrak{A}} \rangle$.

Con ello en mente se tiene la siguiente definición.

Definición 4.1.6. Dados $X \subseteq_{fin} A$ y $B \subseteq A$ definimos la dimensión de X respecto a B como la cardinalidad del mínimo $X_0 \subseteq X$ tal que X_0 es independiente y genera a X en la pregeometría $\langle \mathfrak{A}, cl^B_{\mathfrak{A}} \rangle$. Lo denotaremos por $dim_{cl}(X/Y)$.

Antes de terminar con esta introducción general demostraremos un último lema que será muy útil en nuestras construcciones.

Lema 4.1.7. *Sean $\langle \mathfrak{A}, cl_{\mathfrak{A}} \rangle$ una pregeometría, $B \subseteq A$ y $X, Y \subseteq B$ tal que B es en conjunto independiente entonces tenemos que $cl(X \cap Y) = cl(X) \cap cl(Y)$.*

Demostración. $\boxed{\subseteq}$ Dado que $X \cap Y \subseteq X$ por la monotoneidad de cl tenemos que $cl(X \cap Y) \subseteq cl(X)$. De manera análoga $cl(X \cap Y) \subseteq cl(Y)$. Por lo tanto,

$$cl(X \cap Y) \subseteq cl(X) \cap cl(Y).$$

$\boxed{\supseteq}$ La prueba la haremos por contradicción. Supongamos que hay una $z \in cl(X) \cap cl(Y) \backslash cl(X \cap Y)$. Por principio de finitud tenemos que

$$M = \{X' | X' \subseteq_{fin} X \text{ tal que } z \in cl(X')\} \neq \emptyset,$$

por lo que sea X_0 un conjunto minimal respecto a la cardinalidad en M. Análogamente tomemos $Y_0 \subseteq_{fin} Y$.

Notemos que $X_0 \nsubseteq Y$, ya que si fuera el caso, tendríamos que $X_0 \subseteq X \cap Y$ y por la monotoneidad de cl llegaríamos a que:

$$cl(X_0) \subseteq cl(X \cap Y).$$

Lo cual implicaría que $z \in cl(X \cap Y)$, lo que es una contradicción con nuestra hipótesis. Por ende, hay un $x \in X_0 \backslash Y$.

Por la minimalidad de X_0 tenemos que $z \in cl(X_0)$ pero $z \notin cl(X_0 \backslash \{x\})$ por lo que el principio de intercambio nos asegura que $x \in cl(X_0 \backslash \{x\} \cup \{z\})$.

Ahora bien note que

$$X_0 \subseteq cl(X_0 \backslash \{x\} \cup \{z\})$$

por contrucción. De donde por monotoneidad e idempotencia de cl se sigue que:

$$cl(X_0) \subseteq cl(X_0 \backslash \{x\} \cup \{z\}).$$

De manera análoga, como $z \in cl(X_0)$ se tiene que:

$$cl(X_0 \backslash \{x\} \cup \{z\}) \subseteq cl(X_0).$$

Por ende, $cl(X_0) = cl(X_0 \backslash \{x\} \cup \{z\})$.

Haciendo la construcción análoga para Y_0 tenemos que hay un $y \in Y_0 \backslash X$ tal que $cl(Y_0) = cl(Y_0 \backslash \{y\} \cup \{z\})$. Por ende por el lema 4.1.2 se sigue que:

$$cl(X_0 \cup Y_0) = cl(cl((X_0 \backslash \{x\}) \cup \{z\}) \cup cl((Y_0 \backslash \{y\}) \cup \{z\})) = cl((X_0 \backslash \{x\}) \cup (Y_0 \backslash \{y\}) \cup \{z\}).$$

Por otro lado, ya que $x \in X_0 \backslash Y$ tenemos que $x \notin X_0 \backslash \{x\} \cup Y_0$ y análogo para y. Por lo que

$$|(X_0\backslash\{x\}) \cup (Y_0\backslash\{y\}) \cup \{z\}| < |X_0 \cup Y_0|.$$

Considere $E := cl(X_0 \cup Y_0)$. Note que al ser $X_0, Y_0 \subseteq B$, B independiente, $X_0 \cup Y_0$ es base de E. Pero por la construcción hecha, también se tiene que $(X_0\backslash\{x\}) \cup (Y_0\backslash\{y\}) \cup \{z\}$ es base de E de cardinalidad menor. Lo cual es una contradicción con la unicidad del tamaño de las bases.

Por lo tanto, no puede existir tal z, de lo que concluimos que

$$cl(X) \cap cl(Y) \subseteq cl(X \cap Y).$$

□

4.2. Definición

Ya que hemos estudiado lo que es una pregeometría estamos en posición de definir lo que se entiende por una clase cuasiminimal excelente pero antes es necesario dar algunas definiciones para que la definición sea digerible.

Definición 4.2.1. Un conjunto $A_0 \subseteq A$ es **elegante** si hay un subconjunto independiente B en A numerable y un número finito $B_1, ..., B_n$ de subconjuntos de B tal que $A_0 = \bigcup_{i=1}^{n} cl_{\mathfrak{A}}(B_i)$.

Para ver que la la definición no es trivial daremos algunos ejemplos.

Ejemplos. Considere $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}^3, \{q\cdot\}_{q\in\mathbb{Q}}, +, \bar{0}\rangle$ como espacio vectorial y dado X definimos $cl(X) = \langle X\rangle$, donde recordemos que $\langle X\rangle$ es el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial generado por X. Veamos algunos ejemplos de conjuntos elegantes y no elegantes en esta estructura:

1. $\mathbb{Q}^3$ es elegante porque $\mathbb{Q}^3 = cl(\{(0,0,1),(0,1,0),)(1,0,0)\})$.

2. $B := \{(3t, 2t, -t)|t \in \mathbb{Q}\} \cup \{(4t, t, 0)|t \in \mathbb{Q}\}$ es elegante ya que $B = cl((3,2,-1)) \cup cl((4,1,0))$.

3. $C := \mathbb{Q}^3\backslash\{\bar{0}\}$ no es elegante ya que para todo $X \subseteq \mathbb{Q}^3$ se tiene que $\bar{0} \in cl(X)$.

4. $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}\langle(1, 1/n, 0)\rangle$ no es elegante.

   Supogamos que sí lo es, entonces hay un B independiente y $B_1, ..., B_n$ tal que $C = \bigcup_{i\in n} cl(B_i)$. Como C es la unión de *rectas* entonces $|B_i| = 1$ para todo i pero como C es la unión de un número numerable de *rectas*, no es posible verlas como la unión de un número finito, es decir, $C \neq \bigcup_{i\in n} cl(B_i)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, C no es elegante.

Observe que si X es elegante entonces se tiene que X es numerable al ser la únion de un número finito de conjuntos a lo más númerables.

Definición 4.2.2. Sean $B \subseteq A$ y $X \subseteq_{fin} A$. Diremos que $tp_{qf}(X/B)$ está determinado sobre un conjunto finito $B_0 \subseteq_{fin} B$, si para todo $L-$monomorfismo parcial f, $f : X \to A'$, y para cada f_1 $L-$monomorfismo parcial, $f_1 : B \to A'$, si $f \cup f_1 \restriction_{B_0}$ es $L-$monomorfismo parcial entonces $f \cup f_1$ también lo es.

Con base en la sección anterior y las últimas definiciones estamos preparados para dar la definición más importante de este capítulo y una de las más importantes de todo el trabajo.

Definición 4.2.3. Diremos que una clase $\mathcal{C}$ en un lenguaje L es **cuasiminimal excelente** si es una clase de estructuras y para cada $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ hay un operador $cl_{\mathfrak{A}}$ cerradura satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. El operador $cl_{\mathfrak{A}}$ es tal que:

   a) Dadas $\langle \mathfrak{A}, cl_{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\langle \mathfrak{B}, cl_{\mathfrak{B}} \rangle$ dos $L-$estructuras tal que $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un $L-$isomorfismo tal que para todo $X \subseteq A$ y $a \in A$ se satisface que $a \in cl_{\mathfrak{A}}(X)$ sii $f(a) \in cl_{\mathfrak{B}}(f(X))$. Entonces $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$ con $cl_{\mathfrak{B}}$.

   b) Cada $cl_{\mathfrak{A}}$ define una pregeometría cerrada numerable en $\mathfrak{A}$.

   c) Para cualquier $X \subseteq A$ tenemos que $cl_{\mathfrak{A}}(X) \in \mathcal{C}$, note que ello nos quiere decir que $cl_{\mathfrak{A}}(X)$ es una $L-$estructura.

   d) Si f es un $L-$monomorfismo parcial de $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$ donde f va de $\{X\} \cup \{y\} \subseteq A$ en $\{f(X)\} \cup \{f(y)\} \subseteq B$ entonces tenemos que $y \in cl_{\mathfrak{A}}(X)$ si y sólo si $f(y) \in cl_{\mathfrak{B}}(f(X))$.

2. ($\aleph_0$-homogeniedad sobre modelos numerables) Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$, $G \subseteq A$ y $G' \subseteq B$ tales que G, G' son vacíos o numerables y cerrados y $g : G \to G'$ es $L-$isomorfismo entonces:

   a) Si $x \in A$ y $x' \in B$ son independientes de G y G' respectivamente entonces $g \cup \{(x, x')\}$ es un $L-$monomorfismo parcial.

   b) Sea f un monomorfismo parcial con $dom(f) = X$ finito. Si $g \cup f : G \cup X \to B$ es un monomorfismo parcial y $y \in cl_{\mathfrak{A}}(X \cup G)$ entonces existe un $y' \in B$ tal que $g \cup f \cup \{(y, y')\}$ es un $L-$monomorfismo parcial.

3. (Excelencia) Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $C \subseteq A$ elegante entonces para todo $X \subseteq_{fin} cl_{\mathfrak{A}}(C)$ el $tp_{qf}(X/C)$ está determinado sobre un conjunto $C_0 \subseteq_{fin} C$.

Ejemplo. Los campos pseudo-exponenciales forman una clase cuasiminimal excelente, la prueba de dicho hecho es el objetivo del siguiente capítulo.

Cabe mencionar que en uno de los resultados más importantes e inesperados de los últimos cinco años en la teoría de modelos, Bays, Hart, Hyttinen, Kesälaä y Kirby demostraron en [9] que de hecho el axioma de excelencia se sigue de los dos primeros. Desafortunadamente en este texto no se realizará la prueba de dicho hecho pero se invita al lector a consultar la misma.

Antes de pasar a demostrar unicidad, demostraremos algunas cosas para familiarizarnos un poco con la definición.

Definición 4.2.4. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos $L-$estructuras. Dado $X \subseteq A \cap B$ decimos que $f : Y \subseteq A \to Y' \subseteq B$ es $X-$monomorfismo parcial si $g = f \cup I_X$ es monomorfismo parcial, donde $I_X = id_X$.

Corolario 4.2.1. *Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ cuasiminimal excelente, $x, y \in A$ y $X \subseteq_{fin} A$ tal que $x, y \in A \backslash cl(X)$ entonces $tp_{qf_{\mathfrak{A}}}(x/cl(X)) = tp_{qf_{\mathfrak{A}}}(y/cl(X))$.*

Demostración. Considere $I_{cl(X)}$ la identidad en $cl(X)$. Claramente es un isomorfismo de $cl(X)$ en $cl(X)$ y dado que por hipótesis $\mathfrak{A}$ cumple CN, $cl(X)$ es numerable y trivialmente es cerrado. Como $x, y \notin cl(X)$ tenemos que ambos son independientes de $cl(X)$ por lo que por la parte dos de $\aleph_0-$homogeniedad tenemos que $I_{cl(X)} \cup \{(x, y)\}$ es monomorfismo parcial.

Por lo que por la definición de monomorfismo parcial tenemos que:

$$tp_{qf_{\mathfrak{A}}}(x/cl(X)) = tp_{qf_{\mathfrak{A}}}(y/cl(X)).$$

□

Proposición 4.2.1. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathcal{C}$ una clase cuasiminimal excelente, $G \subseteq A$ y $G' \subseteq A'$ numerables y cerrados o vacíos y $g : G \to G'$ isomorfismo. Sea $f : X \subseteq A \to X' \subseteq A'$ monomorfismo parcial tal que $dom(f) = X$ y $im(f) = X'$ son finitos y que $f \cup g : X \cup G \to X' \cup G'$ es monomorfismo parcial. Entonces existe $F \supseteq f \cup g$ isomorfismo entre $cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$ y $cl_{\mathfrak{A}'}(G' \cup X')$.*

Demostración. La idea de la prueba es construir F recursivamente por el método de back-and-forth, el cual será posible realizar principalmente debido a que contamos con $\aleph_0-$homogeneidad.

Como X es finito y G es numerable por CN se tiene que $cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$ es numerable. Análogamente se tiene que $cl_{\mathfrak{A}'}(G' \cup X')$ es numerable. Sean $\{x_n\}_{n\in\omega}$ y $\{x'_n\}_{n\in\omega}$ enumeraciones de $cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$ y $cl_{\mathfrak{A}}(G' \cup X')$ respectivamente. Con dichas enumeraciones iremos construyendo monomorfismos parciales de $cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$ a $cl_{\mathfrak{A}'}(G' \cup X')$ tales que para toda n:

1. $dom(f_n)$ sea finito.
2. $f_n \subseteq f_{n+1}$.
3. $f_n \cup g$ sea monomorfismo parcial entre subconjuntos de $cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$ y $cl_{\mathfrak{A}'}(X' \cup G')$.
4. Si $n = 2k + 1$ entonces $\{x_i\}_{i\leq k} \subseteq dom(f_n)$ y si $n = 2(k + 1)$ entonces $\{x'_i\}_{i\leq k} \subseteq im(f_n)$.

Hagamos la contrucción por recursión.

- Si $n = 0$, definamos $f_0 = f$. Por hipótesis $dom(f)$ es finito y $f \cup g$ es monomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}'$ pero como $dom(f \cup g) \subseteq cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$ y $im(f_n) \subseteq cl_{\mathfrak{A}'}(G' \cup X')$, este también es monomorfismo parcial entre $cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$ y $cl_{\mathfrak{A}'}(G' \cup X')$.

- Si n es impar. Sea

$$a := min\{x \in cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X) | x \in cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X) \backslash dom(f_{n-1})\}$$

  Donde min quiere decir el mínimo respecto a nuestra enumeración. Note que $g : G \to G'$ es isomorfismo entre conjuntos cerrados y numerables o vacíos, que por construcción $g \cup f_{n-1}$ es monomorfismo y que $dom(f_{n-1})$ es finito. Más aún, como $a \in cl_{\mathfrak{A}}(X \cup G)$ y $X \subseteq dom(f_{n-1})$ por la condición 2. y la base de la contrucción se tiene que $a \in cl_{\mathfrak{A}}(G \cup dom(f_{n-1}))$. Por ende, por $\aleph_0-$homogeneidad b) en el modelo $cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$ existe $a' \in cl_{\mathfrak{A}'}(G' \cup X')$ tal que $g \cup f_{n-1} \cup \{(a, a')\}$ es monomorfismo. Por lo tanto, definamos $f_n = f_{n-1} \cup \{(a, a')\}$. Claramente f_n cumple las tres primeras condiciones, la prueba de que la cuarta se sigue por inducción sobre la construcción.

- Si n es par distinto de cero. Sabemos por recursión que f_{n-1} es monomorfismo parcial entonces f^{-1}_{n-1} en su imagen es monomorfismo parcial; por lo que haciendo una construcción análoga pero ahora en $cl_{\mathfrak{A}'}(G' \cup X')$ obtenemos un h. Definimos a $f_n = h^{-1}$ en su imagen. Claramente f_n cumple lo deseado.

Ahora bien, definamos $F = \bigcup_{n\in\omega} f_n$. Por los pasos impares tenemos que $dom(F) = cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$ y por lo pares que $Im(F) = cl_{\mathfrak{A}'}(G' \cup X')$ de donde concluimos que F es biyección. Pero debido a que es la unión de monomorfismos parciales se tiene que F es un isomorfimo y claramente extiende a $f \cup g$.

Por lo tanto, $F : cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X) \to cl_{\mathfrak{A}'}(G' \cup X')$ es isomorfismo.

□

La prueba anterior es parecida a lo que realizaremos en la siguiente sección por lo que sugerimos al lector releerla en caso de tener dudas respecto a la misma. Antes de terminar, es pertinente enunciar un último corolario.

Corolario 4.2.2. *Bajo las hipótesis del teorema anterior si* $a \in A \backslash cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$ *y* $a' \in A' \backslash cl_{\mathfrak{A}'}(G' \cup X')$ *entonces* $g \cup f \cup \{(a, a')\}$ *es monomorfismo parcial.*

Demostración. Por la proposición anterior existe $F \supseteq f \cup g$ isomorfismo entre $cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$ y $cl_{\mathfrak{A}'}(G' \cup X')$. Como ambos son numerables, ya que contamos con CN por $\aleph_0-$homogeniedad a) se tiene que $F \cup \{(a, a')\}$ es monomorfismo parcial y por ende $f \cup g \cup \{(a, a')\}$ es monomorfismo parcial. □

4.3. Unicidad

En esta sección demostraremos algunos lemas y teoremas que nos serán útiles para demostrar **Teorema***. De hecho terminaremos esta sección con la primera parte de **Teorema*** pero antes de ello es necesario dar algunas definiciones.

Definición 4.3.1. Diremos que un monomorfismo parcial (monomorfismo) f, $f : A \to B$, es **cerrado** sii dado $X \subseteq A$ tal que X está en el dominio de f y es cerrado entonces $f(X)$ es cerrado. En el caso de que la inclusión de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ sea cerrada, diremos que $\mathfrak{A}$ es subestructura cerrada de $\mathfrak{B}$ y lo denotaremos por $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{B}$.

Definición 4.3.2. Diremos que un monomorfismo parcial (monomorfismo) f, $f : A \to B$, es **semicerrado** sii $dom(f)$ es cerrado en $\mathfrak{A}$ y $f(dom(f))$ es cerrado en $\mathfrak{B}$.

Queda ver la relación que existe entre ambos conceptos en el contexto de una clase cuasiminimal excelente y es justamente ello lo que dice nuestra siguiente proposición.

Proposición 4.3.1. *Sean* $\mathcal{C}$ *una clase cuasiminimal excelente,* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$, $f : A \to B$ *monomorfismo parcial y* $dom(f)$ *es cerrado en* $\mathfrak{A}$ *entonces* f *es monomorfismo parcial cerrado sii* f *es monomorfismo parcial semicerrado.*

Demostración. La ida es trivial por lo que sólo probaremos la vuelta. Sea $X \subseteq dom(f)$ tal que X es cerrado en $\mathfrak{A}$. Como lo que queremos demostrar es que $f(X)$ es cerrado, lo que haremos será demostrar que $cl_{\mathfrak{B}}(f(X)) = f(X)$. El hecho de que $f(X) \subseteq cl_{\mathfrak{B}}(f(X))$ se sigue de la definición de pregeometría.

Para la otra contención, sea $a \in cl_{\mathfrak{B}}(f(X))$. Note que $f(X) \subseteq f(dom(f))$ y que por monotoneidad $cl_{\mathfrak{B}}(f(X)) \subseteq cl_{\mathfrak{B}}(f(dom(f)))$, pero como $f(dom(f))$ es cerrado entonces $cl_{\mathfrak{B}}(f(X)) \subseteq f(dom(f))$. Por ende, hay un $b \in dom(f)$ tal que $f(b) = a$. Ahora bien, por definición de cuasiminimal excelente 1. d) como $f(b) \in cl_{\mathfrak{B}}(X)$, se tiene que $b \in cl_{\mathfrak{A}}(X)$. Más aún, como por hipótesis X es cerrado tenemos que $b \in X$. Por lo que $a = f(b) \in f(X)$. Como a era arbitraria queda probada la contención. □

Por lo tanto, las definiciones son equivalentes bajo la hipótesis adicional de que el $dom(f)$ es cerrado. Además note que en el caso de tener un monomorfismo son equivalentes pues A es cerrado con $cl_{\mathfrak{A}}$. Otros dos hecho importantes son los siguientes.

Proposición 4.3.2. *Sean $\mathcal{C}$ una clase cuasiminimal excelente, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$ y $f : A \to B$ monomorfismo parcial cerrado. Si $X \subseteq dom(f)$ entonces*

$$cl_{\mathfrak{B}}(f(X)) = f(cl_{\mathfrak{A}}(X)).$$

Demostración. $\boxed{\subseteq}$ Como $X \subseteq cl_{\mathfrak{A}}(X)$ se tiene que $f(X) \subseteq f(cl_{\mathfrak{A}}(X))$ y por la monotonía de $cl_{\mathfrak{B}}$ se tiene que $cl_{\mathfrak{B}}(f(X)) \subseteq cl_{\mathfrak{B}}(f(cl_{\mathfrak{A}}(X)))$.

Pero como f es cerrada se tiene que $cl_{\mathfrak{B}}(f(cl_{\mathfrak{A}}(X))) = f(cl_{\mathfrak{A}}(X))$, de donde se concluye que:

$$cl_{\mathfrak{B}}(f(X)) \subseteq f(cl_{\mathfrak{A}}(X)).$$

$\boxed{\supseteq}$ Sea $x \in f(cl_{\mathfrak{A}}(X))$ entonces hay un $y \in cl_{\mathfrak{A}}(X)$ tal que $f(y) = x$. Por ende como f es monomorfismo por 1.d) de la definición de clase cuasiminimal excelente tenemos que $x \in cl_{\mathfrak{B}}(f(X))$. □

Lema 4.3.1. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$, $X \subseteq A$ y $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ entonces:*

1. $cl_{\mathfrak{A}}(X) = cl_{\mathfrak{B}}(X) \cap A$.
2. *Más aún si $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{B}$ entonces $cl_{\mathfrak{A}}(X) = cl_{\mathfrak{B}}(X)$.*

Demostración.

1. $\boxed{\subseteq}$ Sea $x \in cl_{\mathfrak{A}}(X)$, como $\mathfrak{A}$ es subestructura de $\mathfrak{B}$ la inclusión es un monomorfismo parcial. Por 1.d) de la definición de clase cuasiminimal excelente $x \in cl_{\mathfrak{A}}(X)$ sii $i(x) \in cl_{\mathfrak{B}}(i(X))$, por ende $i(x) \in cl_{\mathfrak{B}}(i(X))$ pero al ser i la inclusión llegamos a que $x \in cl_{\mathfrak{B}}(X)$. Además como cl es una pregeometría en A, $cl_{\mathfrak{A}}(X) \subseteq A$ con lo que tenemos que $x \in cl_{\mathfrak{B}}(X) \cap A$.

   $\boxed{\supseteq}$ Sea $x \in cl_{\mathfrak{B}}(X) \cap A$. Considere $i_{\mathfrak{A}} : B \supset A \to A$ inversa en la imagen. Note que es un monomorfismo parcial y que al estar $x \in A$, $x \in domi_{\mathfrak{A}}$. Por lo tanto, aplicando de nuevo 1.d) tenemos que $x \in cl_{\mathfrak{A}}(X)$.

2. Al ser $i(A) = A$ cerrado en $\mathfrak{B}$ tenemos que $cl_{\mathfrak{B}}(A) = A$ y dado que $X \subseteq A$ entonces $cl_{\mathfrak{B}}(X) \subseteq cl_{\mathfrak{B}}(A)$; por lo tanto $cl_{\mathfrak{B}}(X) \cap A = cl_{\mathfrak{B}}(X)$ y por la parte uno acabamos.

□

Al principio de la sección 4.2 definimos lo que era ser un conjunto elegante y no hemos vuelto a tocarlos, lo único que sabemos hasta ahora de ellos es que son pieza fundamental de la condición de excelencia. Debido a ello a continuación daremos una proposición para familiarizarnos con ellos y que será muy útil al probar los grandes teoremas del capítulo.

Lema 4.3.2. *Si X es un conjunto elegante y f es un monomorfismo parcial cerrado tal que X está en el dominio de f entonces $f(X)$ es elegante.*

Demostración. Como X es elegante hay un D numerable e independiente y $D_1, ..., D_n \subseteq D$ tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} cl_{\mathfrak{A}}(D_i).$$

Note que como X está en el dominio, $cl_{\mathfrak{A}}(D_i)$ $i \in \{1, ..., n\}$ están en el dominio. Considere a $E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, dado que está contenido en D, E es numerable y al ser f inyectiva $f(E)$ es numerable.

Afirmamos que $f(E)$ es el que funciona, es decir, $f(D_1), ..., f(D_n)$ son tales que

$$f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} cl_{\mathfrak{B}}(f(D_i))$$

y que $f(E)$ es independiente.

Note que como f es cerrado por la proposición 4.3.2 se tiene que $cl_{\mathfrak{B}}(f(D_i)) = f(cl_{\mathfrak{A}}(D_i))$ para todo D_i.

De ahí que

$$f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} f(cl_{\mathfrak{B}}(D_i) = \bigcup_{i=1}^{n} cl_{\mathfrak{B}}(f(D_i)).$$

La independencia de $f(E)$ se sigue de 1.d) y del hecho de que $f(A \backslash \{a\}) = f(A) \backslash \{f(a)\}$ al ser f inyectiva. Por lo tanto, $f(X)$ es elegante. $\square$

Antes de pasar a un primer teorema es pertinente introducir una última definición.

Definición 4.3.3. Dado $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$, decimos que $Y \subseteq A$ es primo sobre $X \subseteq Y$ si para todo $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$ y todo monomorfismo parcial cerrado de X a $\mathfrak{B}$, este puede ser extendido a un monomorfismo parcial de Y a $\mathfrak{B}$.

Teorema 4.3.1. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathcal{C}$ cuasiminimal excelente y $X \subset A$ elegante. Entonces si $f : X \subseteq A \to X' \subseteq A'$ es monomorfismo parcial cerrado tal que $cl_{\mathfrak{A}}(X) = A$ y $cl_{\mathfrak{A}'}(X') = A'$ entonces f puede ser extendido a F isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$.*

Demostración. La idea de la prueba es ir construyendo F recursivamente por un argumento de back-and-forth, el cual podremos hacer por ser $\mathcal{C}$ cuasiminimal excelente.

Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathcal{C}$ y f un monomorfismo parcial cerrado tal que $dom(f) = X$ y $im(f) = X'$. Notemos que X es numerable al ser elegante y contar con una pregeometría con CN y no sólo eso, sino que al cumplir nuestra preogeometría con CN se tiene que A es numerable. Ahora bien, por el lema anterior se tiene que $f(X)$ es elegante por lo que por un razonamiento análogo al anterior podemos concluir que A' es numerable.

Sean $\{x_n\}_{n \in \omega}$ enumeración de A y $\{x'_n\}_{n \in \omega}$ enumeración de A'. Con dichas enumeraciones iremos construyendo monomorfismos parciales f_n de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{A}'$ tales que para cada n:

1. $dom(f_n)$ sea finito.
2. $f_n \subseteq f_{n+1}$.
3. $f_n \cup f$ sea monomorfismo parcial.
4. Si $n = 2k+1$ entonces $\{x_i\}_{i \leq k} \subseteq dom(f_n)$ y si $n = 2(k+1)$ entonces $\{x'_i\}_{i \leq k} \subseteq im(f_n)$.

Hagamos la siguiente contrucción por recursión.

- Si $n = 0$, definamos $f_0 = \emptyset$ y claramente cumple lo deseado.

- Si n es impar. Sea
$$a := min\{x \in A | x \in A \backslash dom(f_{n-1})\}.$$
  Donde min es el mínimo es respecto a la enumeración $\{x_n\}_{n\in\omega}$.

  Sea $P := dom(f_{n-1}) \cup \{a\} \subseteq cl_{\mathfrak{A}}(X)$, por excelencia el $tp_{qf}(P/X)$ está definido sobre un conjunto X_1 tal que $X_1 \subseteq_{fin} X$.

  Como $a \in cl_{\mathfrak{A}}(X)$ por el principio de finitud hay un $X_2 \subseteq_{fin} X$ tal que $a \in cl_{\mathfrak{A}}(X_2)$. Claramente $X_0 = X_1 \cup X_2$ cumple ambas propiedades, es decir, el $tp_{qf}(P/X)$ está definido sobre el conjunto X_0 que claramente es finito y $a \in cl_{\mathfrak{A}}(X_0)$.

  Sea $g = f_{n-1} \cup f \restriction X_0$. Como por inducción $f_{n-1} \cup f$ es monomorfismo entonces g es un monomorfismo parcial. De donde como $a \in cl(X_0) \subseteq cl(X_0 \cup dom(f_{n-1}))$ y el $dom(g)$ es finito por $\aleph_0-$homogeniedad b) hay un $b \in \mathfrak{A}'$ tal que
$$f_{n-1} \cup f \restriction X_0 \cup \{(a, b)\}$$
  es monomorfismo parcial, definamos a $f_n = f_{n-1} \cup \{(a, b)\}$. Claramente f_n cumple 1. y 2., 3. se sigue de la defínción de que el $tp_{qf}(P/X)$ está definido sobre X_0 y 4. se sigue por inducción sobre la construcción.

- Si n es par. Por lema anterior $f(X)$ es elegante y note que si f es un monomorfismo parcial, su inversa en la imagen es un monomorfismo parcial. Por lo tanto, podemos hacer exactamente la misma construcción que se hizo en el caso que n era impar.

Ahora bien, con ello definamos $F = \bigcup_{n\in\omega} f_n$. Afirmamos que F es el isomorfismo buscado. Note que $f \subseteq F$, al cumplirse que para toda $n \in \omega$ $f \cup f_n$ es monomorfismo, y que F es monomorfismo, porque tenemos una cadena de monomorfismos parciales que cubren todo A por los pasos pares. Más aún por los pasos impares, se tiene que $F(A) = A'$. Por ende, F es isomorfismo.

□

Corolario 4.3.1. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathcal{C}$ cuasiminimal excelente y $X \subset A$ elegante, entonces todo monomorfismo parcial cerrado $f : X \to A'$ se extiende a un monomorfismo parcial cerrado $F : cl_{\mathfrak{A}}(X) \to A'$, es decir, $cl_{\mathfrak{A}}(X)$ es primo sobre X.*

Demostración. La prueba es análoga a la del teorema anterior sólo que nos restringimos a $cl(X)$ y a $cl(f(X))$ que se encuentran en la clase por 1. c). Notemos que el F encontrado por dicho método es cerrado, ya que $F(cl_{\mathfrak{A}}(X))$ es cerrado en $\mathfrak{A}'$, al ser $F(cl_{\mathfrak{A}}(X)) = cl_{\mathfrak{B}}(f(X))$, y por la proposición 4.3.1. □

Con dicho teorema y corolario a la mano probaremos los siguientes dos teoremas que son los teoremas que nos asegurarán unicidad, el primero para cuando $\dim(\mathfrak{A}) \leq \aleph_1$ y el segundo para cuando $\dim(\mathfrak{A}) > \aleph_1$

Teorema 4.3.2. *Sean $\mathcal{C}$ una clase cuasiminimal excelente, $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathcal{C}$ tal que $\dim(\mathfrak{A}) \leq \aleph_1$. Sea $G \subseteq A$ vacío o cerrado y numerable y sea $f_0 : G \to \mathfrak{A}'$ un monomorfismo cerrado. Sea $B \subseteq A$ base de A sobre G y sea $g : B \subseteq A \to A'$ una función inyectiva y cuya imagen es independiente sobre $im(f_0)$. Entonces $f = f_0 \cup g$ puede ser extendida a $F : A \to A'$ monomorfismo. Más aún, si $im(g)$ genera $\mathfrak{A}'$ sobre $im(f_0)$ entonces F es isomorfismo.*

Demostración. Sea $\{b_\lambda\}_{\lambda<\mu}$ una buena ordenación de B, la cual existe por el Axioma de Elección. Note que como $\dim(\mathfrak{A}) \leq \aleph_1$ tenemos que $\mu \leq \omega_1$.

Definamos a $G_\kappa = cl_{\mathfrak{A}}(G \cup \{b_\lambda | \lambda < \kappa\})$ y $G'_\kappa = cl_{\mathfrak{A}'}(f_0(G) \cup \{g(b_\lambda)|\lambda < \kappa\})$. Construiremos recursivamente sobre los ordinales $\kappa \leq \mu$, $h_\kappa : G_\kappa \to \mathfrak{A}'$ monomorfimos parciales cerrados tales que:

1. $f \restriction_{G_\kappa} \subseteq h_\kappa$.
2. $h_\kappa : G_\kappa \to G'_\kappa$ sea isomorfismo.
3. Si $\kappa_1 \leq \kappa_2$ entonces $h_{\kappa_1} \subseteq h_{\kappa_2}$.

La construcción la haremos de la siguiente manera:

- Si $\kappa = 0$, sea $h_0 = f_0$; el cual claramente cumple lo deseado.
- Si κ es un ordinal límite, sea $h_\kappa = \bigcup_{\beta<\kappa} h_\beta$; el cual claramente cumple lo deseado.
- Si κ es sucesor, supongamos que $\kappa = \beta + 1$, será necesario realizar una construcción por recusión. Antes de iniciar la construcción, note que G_κ y G'_κ son numerables pues $\kappa < \omega_1$ y por CN. Sean $\{g_n\}_{n\in\omega}$ y $\{g'_n\}_{n\in\omega}$ las enumeraciones respectivas. Lo que haremos será construir recursivamente sobre los naturales j_n monomorfismos parciales y definiremos $h_\kappa = \bigcup_{n\in\omega} j_n$. Las j_n las construiremos de tal manera que:

  1. $dom(j_n)$ es finito.
  2. $j_n \subseteq j_{n+1}$.
  3. $j_n \cup h_\beta$ es monomorfismo parcial.
  4. Si $n = 2k + 1$ entonces $\{x_i\}_{i\leq k} \subseteq dom(j_n)$ y si $n = 2(k + 1)$ entonces $\{x'_i\}_{i\leq k} \subseteq im(j_n)$.

  Con ello en mente realicemos nuestra construcción.

  - Si $n = 0$ sea $j_0 := \{(b_\beta, f(b_\beta))\}$. Por hipótesis de inducción h_β es isomorfismo entre G_β y G'_β numerables. Al ser f inyectiva, B base sobre G y la $im(g)$ independiente sobre la $im(f_0)$ tenemos que $b_\beta \notin G_\beta$ y $f(b_\beta) \notin G'_\beta$. Por lo que por $\aleph_0$-homogeniedad a) $h_\beta \cup \{(b_\beta, f(b_\beta))\}$ es monomorfismo parcial, en particular j_0 es monomorfismo parcial. Por lo tanto, j_0 cumple lo deseado.
  - Si n es impar. Sea
  $$a = min\{b \in G_{\beta+1} | b \notin dom(j_{n-1})\},$$
  donde por min nos referimos al mínimo respecto a la enumerció $\{g_n\}_{n\in\omega}$. Por hipótesis de inducción $h_\beta : G_\beta \to G'_\beta$ es isomorfismo entre G_β y G'_β, que son subconjuntos cerrados numerables de los modelos G_κ y G'_κ.Note que $a \in G_\kappa \subseteq cl(G_\beta \cup dom(j_{n-1}))$ porque $b_\beta \in dom(j_0)$. Como el $dom(j_{n-1})$ es finito y $j_{n-1} \cup h_\beta$ es monomorfismo por $\aleph_0-$homogeniedad b) hay un $a' \in G'_\kappa$ tal que $j_{n-1} \cup h_\beta \cup \{(a, a')\}$ es monomorfismo parcial. Sea $j_n = j_{n-1} \cup \{(a, a')\}$.
  - Si n es par. Realizamos lo análogo pero con j^{-1}_{n-1}, donde j^{-1}_{n-1} es la inversa en la imagen. De forma análoga a como se hizo en la proposición 4.2.1.

Por construcción los $\{j_n\}_{n\in\omega}$ cumplen 1.,2., 3. y 4. Definamos $h_\kappa := \bigcup_{n\in\omega} j_n$.

Claramente es monomorfismo pues tenemos una cadena de monomorfismos parciales y es cerrado por la proposición 4.3.1 debido a que

$$h_\kappa(G_\kappa) = G'_\kappa.$$

Por ello, es claro que es isomorfismo entre G_κ y G'_κ, además trivialmente extiende a h_β por la condición 3.

Con ello, definamos $F := \bigcup_{\lambda<\mu} h_\lambda$. Como B es base de A sobre G tenemos que $G_\mu = A$, por lo que F está definida en todo A. Además dado que es la unión de monomorfismos parciales que se encuentran en una cadena tenemos que es monomorfismo.

Más aún, si $g(B)$ genera a A' sobre $im(f_0)$ afirmamos que F es suprayectiva. Para ver ello, sea $a \in A' = cl(g(B) \cup Im(f_0))$ entonces por el principio de finitud hay un $B_0 \subseteq_{fin} B$, el cual a su vez se encuentra contenido en B_κ para $\kappa < \mu$, tal que $a \in cl(g(B_\kappa) \cup Im(f_0)) = G'_\kappa$. Por lo que por el paso κ hay un $b \in A$ tal que $F(b) = a$. Por lo tanto es suprayectiva, es decir, $F(A) = A'$. Por lo que F es isomorfismo cerrado. □

Proposición 4.3.3. *Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ cuasiminimal excelente, $dim(\mathfrak{A}) \leq \aleph_1$, $G \subseteq A$ vacío o numerable y cerrado y $\bar{x}, \bar{y} \in A^n$ tal que $tp_{qf_{\mathfrak{A}}}(\bar{x}/G) = tp_{qf_{\mathfrak{A}}}(\bar{y}/G)$ entonces existe un $f : A \to A$ automorfismo que deja fijo a G y manda a $\bar{x}$ a $\bar{y}$.*

Demostración. Sea $f : \bar{x} \cup G \to \bar{y} \cup G$ un monomorfismo parcial tal que $f(\bar{x}) = \bar{y}$ y $f\restriction_G = Id_G$, el cual existe por lema 1.2.5. Sea $\bar{x} := (c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_m)$ donde $c_1, ..., c_n$ es el máximo conjunto independiente en $\bar{x}$ sobre G, por lo tanto dado $i \in \{1, ...m\}$ se tiene $d_i \in cl_{\mathfrak{A}}(G \cup \{c_1...c_n\})$. Hagamos exactamente lo mismo con $\bar{y}$, $\bar{y} = (f(c_1), ..., f(c_n), f(d_1), ..., (d_m))$. Note que $\{f(c_i)\}_{i\in\{1,...,n\}}$ cumplen exactamente lo mismo que las $\{c_i\}_{i\in\{1,...,n\}}$ por la definición de cuasiminimal excelente 1.d).

Extendamos a $\bar{c}$, $f(\bar{c})$ a dos bases de A sobre G. Dado que son de la misma cardinalidad por el lema 4.1.6, considere una g una biyección tal que $f\restriction_{\bar{c}} = g\restriction_{\bar{c}}$ y considere a f_0 la identidad en G.

Con ello repita la construcción del teorema 4.3.2 sólo que en la construcción de las h_κ para $\kappa \leq n$ inicie mandando a d_i a $f(d_i)$ si $d_i \in cl(G \cup \{c_1, ..., c_k\})$, podemos iniciar con ello porque tienen el mismo tipo libre de cuantificadores sobre G.

Como en el teorema 4.3.2 tenemos un automorfismo σ y cumple que $\sigma(\bar{x}) = \bar{y}$ por la forma en como se modificó la construcción. □

El siguiente teorema tiene exactamente la misma afirmación que el teorema anterior salvo que la $dim(\mathfrak{A}) > \aleph_1$ y la $dim(G) = \aleph_0$; pero tiene una prueba completamente distinta a la del teorema anterior, ya que $\aleph_0-$homogeniedad sólo nos permite extender monomorfismo sobre conjuntos cerrados numerables.

Teorema 4.3.3. *Sea $\mathcal{C}$ una clase cuasiminimal excelente tal que la cerradura es definible en $L_{\omega_1,\omega}$*[5] *y $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathcal{C}$ tal que* $\dim(\mathfrak{A}) > \aleph_1$. *Sea $G \subseteq A$ cerrado, independiente, numerable y tal que la $dim(G) = \aleph_0$ y sea $f_0 : G \subseteq A \to A'$ un monomorfismo cerrado. Sea $B \subseteq A$ base de A sobre G y sea $g : B \subseteq A \to A'$ una función inyectiva cuya imagen es independiente sobre $im(f_0)$. Entonces $f = f_0 \cup g$ puede ser extendida a $F : A \to A'$ monomorfismo cerrado. Más aún, si $im(g)$ genera $\mathfrak{A}'$ sobre $im(f_0)$ entonces F es isomorfismo cerrado.*

[5] Es decir, dada $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ la cerradura $cl_{\mathfrak{A}}$ es aquella determinada por su definición en $L_{\omega_1,\omega}$.

Demostración. La prueba es bastante laboriosa por lo que primero daremos la idea general. La idea es construir para cada $X \subseteq_{fin} B$ un $f_X : cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X) \to A'$ monomorfismo cerrado tal que cumpla que:

1. Si $Y \subseteq X$ entonces $f_Y \subseteq f_X$.

2. $f_X \restriction_{X \cup G} = f \restriction_{X \cup G}$.

Para al final tomar a $F = \bigcup_{X \subseteq_{fin} B} f_X$, la cual va a ser monomorfismo por el prinicipio de finitud de la cerradura. Con eso en mente iniciemos la contrucción.

La construcción se hará recursivamente sobre los subconjuntos finitos de B.

- Si $X = \emptyset$. Sea $f_\emptyset = f_0$. Claramente cumple lo deseado ya que por hipótesis f_0 es un monomorfismo parcial cerrado cuyo dominio es G.

- Sea X tal que $|X| = n$. Para cada $x_i \in X$ definamos $Y_i = X \backslash \{x_i\}$. Como $|Y_i| = n - 1$ por recursión tenemos que f_{Y_i} es monomorfismo cerrado que cumple 1. y 2. para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Definamos a $h_k = \bigcup_{i=1}^{k} f_{Y_i}$ y $C_k = \bigcup_{i=1}^{k} cl_{\mathfrak{A}}(G \cup Y_i)$.

  Primero note que dado $k \leq n$, h_k es función, es decir, que las funciones $\{f_{Y_i}\}_{i \in \{1,...,n\}}$ son compatibles. Sea $x \in dom(f_{Y_i}) \cap dom(f_{Y_j})$, lo cual implica, por como se definió el dominio de las f_{Y_i}, que
  $$x \in cl_{\mathfrak{A}}^G(Y_i) \cap cl_{\mathfrak{A}}^G(Y_j) = cl_{\mathfrak{A}}^G(Y_i \cap Y_j),$$
  la igualdad se debe al lema 4.1.7, ya que Y_i, Y_j son subconjuntos de un conjunto independiente. De donde por definición, $x \in dom(f_{Y_i \cap Y_j})$ y como f_{Y_i}, f_{Y_j} extienden a $f_{Y_i \cap Y_j}$ tenemos que $f_{Y_i}(x) = f_{Y_i \cap Y_j}(x) = f_{Y_j}(x)$. Por lo tanto, las f_{y_i} sí son compatibles.

  En segundo lugar, demostraremos por inducción sobre k que cada h_k es monomorfismo parcial.

  Si $k = 1$, $h_1 = f_{Y_1}$ que por hipótesis de inducción es monomorfismo parcial.

  Si $k = l + 1$, sea $\bar{a} \in dom(h_k)$ y α una fórmula libre de cuantificadores, lo que demostraremos es que:
  $$\mathfrak{A} \vDash \alpha[\bar{a}] \text{ sii } \mathfrak{A}' \vDash \alpha[h_k(\bar{a})].$$

  Para ello construiremos τ monomorfismo parcial tal que coincida con h_k en $\bar{a}$.

  Como $\bar{a} \in C_k$, podemos descomponer a $\bar{a}$ como $\bar{b} \in C_{k-1}$ y $\bar{c} \in cl_{\mathfrak{A}}^G(Y_k)$. Note que por principio de finitud hay un $G_0 \subseteq_{fin} G$ tal que $(\bar{b}, \bar{c}) \in cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup X)$. Más aún, si $d \in \bar{b}$ entonces existe un $i \leq k - 1$ tal que $d \in cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup Y_i)$ y si $e \in \bar{c}$ entonces $e \in cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup Y_k)$.

  Afirmamos que existe un $z \in G \backslash cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup Y_k)$. Si no fuera el caso entonces tendríamos que $G \subseteq cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup Y_k)$, lo cual es una contradicción con la hipótesis de que la $dim(G) = \aleph_0$ pues $G_0 \cup Y_k$ es finito.

  Sea $z \in G \backslash cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup Y_k)$. Considere ahora a
  $$\mathfrak{A}_0 = cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X),$$
  por definición de cuasiminimal excelente (1.c)) tenemos que $\mathfrak{A}_0 \in \mathcal{C}$.

Note que $x_k \in A_0 \backslash cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup Y_k)$ pues X es independiente sobre G, que por construcción $z \in A_0 \backslash cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup Y_k)$ y que la $dim(\mathfrak{A}_0) = \aleph_0$. Por lo que por el corolario 4.2.1 y por la proposición 4.3.3, hay un $\sigma \in Aut(\mathfrak{A}_0)$ que deja fijo a $cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup Y_k)$ y manda a x_k a z.

Por otro lado, queremos contruir un $j : cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X) \to A'$ monomorfismo parcial cerrado que extienda a $h_{k-1} \cup g \restriction_X$. Cuando $k = 2$,

$$h_1 \cup g \restriction_X = f_{Y_1} \cup \{(x_1, g(x_1))\},$$

al ser $X = Y_1 \cup \{x_1\}$ y por la condición dos de nuestra construcción. Note que x_1 genera a $cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$ sobre $cl_{\mathfrak{A}}(Y_1 \cup G)$ y como x_1 y $g(x_1)$ son independientes de $cl_{\mathfrak{A}}(Y_1 \cup G)$ y $h_1(cl_{\mathfrak{A}}(Y_1 \cup G))$ respectivamente, para obtener j es posible realizar una construcción análoga a la hecha en el caso sucesor del teorema anterior.

Cuando $k \geq 3$,

$$h_{k-1} \cup g \restriction_X = h_{k-1}.$$

por la condición dos de nuestra contrucción, entonces por hipótesis de inducción tenemos que h_{k-1} es monomorfismo cerrado.

Además, C_k es elegante y se tiene que

$$cl_{\mathfrak{A}}(C_k) = cl_{\mathfrak{A}}(\bigcup_{i=1}^{k} cl_{\mathfrak{A}}(G \cup Y_k)).$$

Lo cual aplicando el lema 4.1.2 y las definiciones de Y_i llegamos a que

$$cl_{\mathfrak{A}}(C_k) = cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X).$$

Debido a que $h_{k-1} \cup g \restriction_X$ es monomorfismo parcial cerrado tal que $G \cup X$ está en el dominio, por el corolario 4.3.1 existe el j que buscamos.

Con estos dos elementos, definamos

$$\tau := j\sigma^{-1}j^{-1}f_{Y_k}\sigma \restriction_{\bar{a}} .$$

Note que τ es monomorfismo parcial ya que es composición de monomorfismos parciales. Demostremos que cumple que $\tau(d) = h_k(d)$ para todo $d \in \bar{a}$. La razón por la cual restringimos a σ a $\bar{a}$ es para que la composición exista.

Primero veamos que $\tau(d) = h_k(d)$ para todo $d \in \bar{b}$. Como $d \in C_{k-1}$, por ende $d \in cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup Y_i)$ para alguna $i \leq k-1$. Por definición de cuasiminimal excelente (1.d))

$$\sigma(d) \in cl_{\mathfrak{A}}(\sigma(G_0 \cup (Y_i \backslash \{x_k\}) \cup \{x_k\})).$$

Pero como σ deja fijo a $cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup Y_k)$ y manda a x_k a z, tenemos que $\sigma(d) \in cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup (Y_i \backslash \{x_k\}) \cup \{z\})$; de donde al estar $z \in G$ y ser $Y_i \cap Y_k = X \backslash \{x_i, x_k\}$ se tiene que

$$\sigma(d) \in cl_{\mathfrak{A}}(G \cup (Y_i \cap Y_k)) \subseteq C_{k-1} \subseteq dom(h_{k-1}).$$

Además note que $j \supseteq h_{k-1}$, que por hipótesis de inducción $f_{Y_k} \restriction_{cl^G_{\mathfrak{A}}(Y_i \cap Y_j)} = f_{Y_i} \restriction_{cl^G_{\mathfrak{A}}(Y_i \cap Y_j)} = h_{k-1} \restriction_{cl^G_{\mathfrak{A}}(Y_i \cap Y_j)}$ y que $h_{k-1} = h_k \restriction_{dom(h_{k-1})}$. Por ende

$$\tau(d) = j\sigma^{-1}j^{-1}f_{Y_k}\sigma(d) = h_{k-1}\sigma^{-1}h_{k-1}^{-1}h_{k-1}\sigma(d) = h_{k-1}(d) = h_k(d).$$

Ahora, veamos que $\tau(e) = h_k(e)$ para todo $e \in \bar{c}$, es decir, $e \in cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup Y_k)$ y al ser σ un automorfismo que deja fijo a $cl_{\mathfrak{A}}(G_0 \cup Y_k)$, $\sigma(e) = e$.

Como $f_{Y_k} \restriction_{Y_k \cup G_0} = j \restriction_{Y_k \cup G_0}$ y ambos son monomorfismos cerrados tenemos que:

$$f_{Y_k}(cl_{\mathfrak{A}}(Y_k \cup G_0)) = cl_{\mathfrak{A}'}(f_{Y_k}(Y_k \cup G_0)) = cl_{\mathfrak{A}'}(j(Y_k \cup G_0)) = j(cl_{\mathfrak{A}}(Y_k \cup G_0))$$

Por ende tenemos que $j^{-1}f_{Y_k}(e) \in cl_{\mathfrak{A}}(Y_k \cup G_0)$ y por ello σ^{-1} lo deja fijo. Debido a que $f_{Y_k} \restriction_{cl(G \cup Y_k)} = h_k \restriction_{cl(G \cup Y_k)}$, concluimos que:

$$\tau(e) = j\sigma^{-1}j^{-1}f_{Y_k}\sigma(e) = j\sigma^{-1}j^{-1}f_{Y_k}(e) = jj^{-1}f_{Y_k}(e) = f_{Y_k}(e) = h_k(e).$$

Por lo tanto, como τ es monomorfismo parcial tenemos que:

$$\mathfrak{A} \models \alpha[\bar{a}] \text{ sii } \mathfrak{A}' \models \alpha[\tau(\bar{a})] \text{ sii } \mathfrak{A}' \models \alpha[h_k(\bar{a})];$$

de ahí que h_k es monomorfismo parcial.

Por lo tanto, en particular $h_n = g_X$ es monomorfismo parcial.

En tercer lugar, demostremos que g_X es cerrado.

Sea $C \subseteq dom(g_X)$ cerrado, probemos que $g_X(C) = cl_{\mathfrak{A}'}(g_X(C))$. Por la monotomía del operador cerradura se tiene que $g_X(C) \subseteq cl_{\mathfrak{A}'}(g_X(C))$.

Para demostrar la otra contenciám, sea $c \in cl_{\mathfrak{A}'}(g_X(C))$. Por el principio de finitud existe $C_0 \subseteq_{fin} C$ tal que $c \in cl_{\mathfrak{A}}(g_X(C_0))$. Afirmamos que

$$g_X^* tp_{\mathfrak{A}}(C_0/X \cup G) = tp_{\mathfrak{A}'}(g_X(C_0)/g_X(X \cup G))$$

Por la proposición 1.2.2 es suficiente demostrar que $(\mathfrak{A}, C_0)$ y $(\mathfrak{A}', C_0')$ son back-and-forth equivalente sobre $X \cup G$ donde $C_0' = g_X(C_0)$. Afirmamos que

$$K = \{f | f \supseteq g_X \restriction_{G \cup X \cup C_0} \text{ tal que } f \text{ es monomorfismo parcial y extensión finita de } g_X \restriction_{G \cup X \cup C_0}\}$$

cumple con lo necesario, es decir, cumple con la definición 1.2.6.

- $K \neq \emptyset$ pues $g_X \restriction_{G \cup X \cup C_0} \in K$.
- Para todo $f \in K$, $f(C_0) = g_X(C_0)$ pues todo $f \supseteq g_X \restriction_{G \cup X \cup C_0}$ y $C_0 \subseteq dom(g_X \restriction_{G \cup X \cup C_0}$).
- Análogamente para toda $f, g \in K$ se cumple que $f \restriction_{G \cup X} = g \restriction_{G \cup X}$.
- Sea $f \in K$ tal que $dom(f) \backslash dom(g_X \restriction_{G \cup X \cup C_0}) = Y$ finito y sea $a \in A \backslash dom(f)$. La extensión de f la haremos por casos:
    1. **Caso 1:** Sea $a \in cl(G \cup X \cup Y \cup C_0)$. Considere $h_1 = f \restriction_G$ y $h_2 = f \restriction_{dom(f) \backslash G}$. Note que por construcción h_1 es isomorfismo entre G y $h_1(G)$ conjuntos cerrados numerables y se tiene que $dom(h_2) = X \cup \{\bar{a}\} \cup Y$ es finito. Por lo tanto, por $\aleph_0$-homogeniedad b) existe $a' \in A'$ tal que $h_1 \cup h_2 \cup \{(a, a')\}$ es monomorfismo parcial; pero $h_1 \cup h_2 \cup \{(a, a')\} = f \cup \{(a, a')\}$, entonces $g := f \cup \{(a, a')\}$ es la extensión deseada.

2. **Caso 2:** Sea $a \in A \backslash cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X \cup Y \cup C_0)$. Note que $f(G \cup X \cup Y \cup C_0)$ es numerable por ende por CN tenemos que $cl_{\mathfrak{A}'}(f(G \cup X \cup Y \cup C_0))$ es numerable y como por hipótesis la $dim(\mathfrak{A}') > \aleph_1$, hay $a' \in A' \backslash cl_{\mathfrak{A}'}(G \cup X \cup Y \cup C_0)$.
   Considere nuevamente $h_1 = f \restriction_G$ y $h_2 = f \restriction_{dom(f) \backslash G}$. Como G es cerrado y $dom(h_2)$ es finito por el corolario 4.2.2 se tiene que $h_1 \cup h_2 \cup \{(a, a')\}$ es monomorfismo parcial; pero $h_1 \cup h_2 \cup \{(a, a')\} = f \cup \{(a, a')\}$, entonces $g := f \cup \{(a, a')\}$ es la extensión deseada.

- El caso de la otra extensión es análoga.

Por lo tanto
$$g^* tp_{\mathfrak{A}}(C_0/X \cup G) = tp_{\mathfrak{A}'}(g_X(C_0)/g_X(X \cup G)).$$

Ahora bien, por construcción el $dom(g_X) = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,\}} cl_{\mathfrak{A}}(G \cup Y_i)$ y como los f_{Y_i} son cerrados por la proposición 4.3.2 se tiene que $im(g_X) = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,\}} cl_{\mathfrak{A}'}(g_X(G) \cup g_X(Y_i))$. Como $C_0 \subseteq dom(g_X)$ se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \forall x(\phi_{cl}(x, C_0) \to \bigvee_{i \in \{1,\ldots,n\}} \phi_{cl}(x, Y_i, G)).$$

Por ende, dicha fórmula está en $tp_{\mathfrak{A}}(C_0/X \cup G)$ y como

$$g^* tp_{\mathfrak{A}}(C_0/X \cup G) = tp_{\mathfrak{A}'}(g_X(C_0)/g_X(X \cup G))$$

concluimos que:

$$\mathfrak{A}' \models \forall x(\phi_{cl}(x, g_X(C_0)) \to \bigvee_{i \in \{1,\ldots,n\}} \phi_{cl}(x, g_X(Y_i), g_X(G)).$$

Como $c \in cl_{\mathfrak{A}'}(g_X(C_0))$ por lo anterior se tiene que $c \in \bigcup_{i \in \{1,\ldots,\}} cl_{\mathfrak{A}}(g_X(G) \cup g_X(Y_i)) = im(g_X)$. Debido a ello, hay un $b \in dom(g_X)$ tal que $g(b) = c \in cl_{\mathfrak{A}'}(g_X(C_0))$. Luego por ser g_X monomorfismo de la parte 1. d) de la definición de clase cuasiminimal excelente se sigue que $b \in cl_{\mathfrak{A}}(C_0)$. Dado que $C_0 \subseteq C$ y C es cerrado se tiene que $cl_{\mathfrak{A}}(C_0) \subseteq C$, por lo que $b \in C$. Por ende $g_X(b) = c \in g_X(C)$.

Por lo tanto, g_X es un monomorfismo parcial cerrado.

Como C_k es especial y $g_X : C_k \to \mathfrak{B}$ es monomorfismo parcial cerrado, por el corolario 4.3.1 tenemos que existe f_X monomorfismo parcial cerrado tal que $f_X : cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X) \to A'$, ya que $cl_{\mathfrak{A}}(C_k) = cl_{\mathfrak{A}}(G \cup X)$. Observe que por construcción f_X cumple los dos requerimientos deseados.

Con todo ello, definamos a $F = \bigcup_{X \subseteq_{fin} B} f_X$. Como los f_X forman una cadena de monomorfismos parciales tenemos que F es monomorfismo parcial; pero por el principio de finitud tenemos que $A = \bigcup_{X \subseteq_{fin} B} cl_{\mathfrak{A}}(X \cup G)$, por lo que F cubre todo A, es decir, F es monomorfismo. Además afirmamos que F es cerrado.

Sea $C \subseteq A$ cerrado, es claro que $F(C) \subseteq cl_{\mathfrak{A}'}(F(C))$ por lo que únicamente demostraremos la otra contención. Sea $x \in cl_{\mathfrak{A}'}(F(C))$, por el principio de finitud, hay $C_0 \subseteq_{fin} C$ tal que $x \in cl_{\mathfrak{A}'}(F(C_0))$. Note que $F \restriction_{cl(G \cup C_0)} = f_{C_0}$ y debido a que f_{C_0} es cerrado y por la proposición 4.3.2 se tiene que $x \in f_{C_0}(cl_{\mathfrak{A}}(C_0))$. Dado que C es cerrado se tiene que $cl_{\mathfrak{A}}(C_0) \subseteq C$ por lo que $x \in F(C)$. Con lo que concluimos que F es cerrado.

Por último, note que si $im(g)$ genera a A' sobre $im(f_0)$ se tiene que F es suprayectiva pues

$$F(A) = F(cl_{\mathfrak{A}}(B \cup G)) = cl_{\mathfrak{A}'}(F(B \cup G)) = cl_{\mathfrak{A}'}(im(g) \cup im(f_0)) = A',$$

la segunda igualadad se debe a que F es cerrada y el resto al hecho que $G \cup B$ genera a A y que $im(g) \cup im(f_0)$ genera a A'. Por lo tanto, bajo dicha hipótesis se tiene que F es isomorfismo.

□

Proposición 4.3.4. *El teorema anterior sigue siendo cierto cuando $dim(G) < \aleph_0$.*[6]

Demostración. Sea $\{b_i\}_{i<\mu}$ una enumeración de la base de A. Considere a $G^* = cl_{\mathfrak{A}}(G \cup \{b_i | i < \omega\})$. Note que la $dim(G^*) = \aleph_0$, que G^* es independiente y cerrado y que por la proposición 4.2.1 podemos extender a f_0 a $f_0' : G^* \to A'$ monomorfismo cerrado.

Lo último que debemos demostrar es que $B \backslash \{b_i | i < \omega\}$ es independiente en G^*. Supongamos que no es el caso, entonces hay un $b \in B \backslash \{b_i | i < \omega\}$ tal que $b \in cl_{\mathfrak{A}}(cl_{\mathfrak{A}}(G \cup \{b_i | i < \omega\}) \cup (B \backslash \{b_i | i \leq \omega\}) \backslash \{b\})$, por monotoneidad y el lema 4.3.1 ello implica que $b \in cl_{\mathfrak{A}}(G \cup (B \backslash \{b\}))$. Lo cual es una contradicción con que B es base sobre G.

Por lo que G^* cumple todas las hipótesis del teorema, de ahí que podamos replicar la prueba del teorema anterior. □

La siguiente proposición afirma lo mismo que la proposición 4.3.3, salvo que la $dim(\mathfrak{A}) > \aleph_1$.

Proposición 4.3.5. *Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ cuasiminimal excelente, $dim(\mathfrak{A}) > \aleph_1$, $G \subseteq A$ vacío o numerable y cerrado y $\bar{x}, \bar{y} \in A^n$ tal que $tp_{qf_{\mathfrak{A}}}(\bar{x}/G) = tp_{qf_{\mathfrak{A}}}(\bar{y}/G)$ entonces existe un $f : A \to A$ automorfismo que deja fijo a G y manda a $\bar{x}$ a $\bar{y}$.*

Demostración. Es análoga a la prueba de la proposición 4.3.3 sólo que en este caso se modifica la prueba del teorema 4.3.3. □

Ya que hemos sido capaces de probar estos dos grandes teoremas es momento de recolectar sus frutos con los dos siguientes corolarios.

Corolario 4.3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una clase cuasiminimal excelente tal que la cerradura es definible en $L_{\omega_1,\omega}$. Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathcal{C}$, B, B' bases de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$ respectivamente y $f_0 : B \to B'$ una biyección. Entonces f_0 puede extenderse a F un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$. En consecuencia, si dos bases de dos modelos son del mismo tamaño entonces los dos modelos que generan son isomorfos.*

Demostración. Por los teoremas 4.3.2 y 4.3.3 tenemos $F : A \to A'$ monomorfismo cerrado tal que $f_0 \subseteq F$. Más aún, como $im(f_0) = B'$ genera a A', se tiene que F es isomorfismo. □

Corolario 4.3.3. *Dada $\mathcal{C}$ una clase cuasiminimal excelente tal que la cerradura es definible en $L_{\omega_1,\omega}$ entonces existe a lo más un modelo para toda cardinalidad no numerable.*

[6]De hecho también se puede demostrar en caso de que $dim(G) > \aleph_0$ pero la prueba es complicada y no es útil para nuestros propósitos, la prueba se encuentra en [15]

Demostración. Procedamos por contradicción, supongamos que existen dos modelos no isomorfos $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1 \in \mathcal{C}$ para alguna cardinalidad no numerable. Sean B_0 y B_1 bases de $\mathfrak{A}_0$ y $\mathfrak{A}_1$ respectivamente. Como A_0 es no numerable, por el corolario 4.1.1 se tiene que B_0 es biyectable con A_0.

Análogamente, se tiene A_1 y B_1 son biyectables. Dado que A_0 y A_1 son biyectables se tiene que B_0 y B_1 son biyectables.

Por lo que por el corolario anterior se tiene que $\mathfrak{A}_0$ es isomorfo a $\mathfrak{A}_1$. Lo cual es una contradicción con nuestra suposición.

Por lo tanto, para cada cardinalidad no numerable hay a lo más un modelo. □

El teorema anterior no se puede generalizar para el caso donde $\mathfrak{A}$ es numerable pues $\mathfrak{A}$ podría tener una base finita, de manera análoga a como sucede en espacios vectariales sobre $\mathbb{Q}$.

El último corolario es justamente la unicidad para cardinales no numerables, queda por demostrar la existencia, que es precisamente lo que haremos en la próxima sección.

4.4. Existencia de Modelos

Hasta ahora sólo hemos demostrado que existe a lo más un modelo para cualquier κ no numerable. En esta sección demostraremos que bajo ciertas hipótesis extras, que como veremos en el próximo capítulo satisface afortunadamente $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, hay un modelo para cualquier cardinal no numerable. Primero demostraremos que las clases cuasiminimal excelentes son cerradas para abajo.

Proposición 4.4.1. *Sean $\mathcal{C}$ una clase cuasiminimal excelente y $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ tal que $dim(\mathfrak{A}) = \kappa$, para κ un cardinal infinito, entonces para todo λ tal que $\aleph_0 \leq \lambda \leq \kappa$ hay un $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$ tal que $dim(\mathfrak{B}) = \lambda$.*

Demostración. Sea λ un cardinal tal que $\aleph_0 \leq \lambda \leq \kappa$ y $\{b_i\}_{i\leq\kappa}$ una base de $\mathfrak{A}$. Considere $B_0 = \{b_i | i < \lambda\}$ y definamos a $\mathfrak{B} = cl_{\mathfrak{A}}(B_0)$. Como $B_0 \subseteq A$ de la definición de clase cuasiminimal excelente 1.c) se sigue que $cl_{\mathfrak{A}}(B_0) \in \mathcal{C}$. Claramente B_0 es independiente y genera a $\mathfrak{B}$. Por lo tanto, $dim(\mathfrak{B}) = |B_0| = \lambda$. □

Ahora bien, antes de pasar a la prueba de que tenemos elementos arbitrariamente grandes (bajo ciertas hipótesis) es necesario dar una definición y probar una proposición.

Definición 4.4.1. Dados $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ modelos. Decimos que $f : A \to B$ es monomorfismo fuerte si f es monomorfismo y para toda φ fórmula y $\{a_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \subseteq A$ se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\{a_i\}_{i\in\omega}] \text{ sii } \mathfrak{B} \models \varphi[\{f(a_i)\}_{i\in\omega}]$$

Lo denotaremos por $\mathfrak{A} \prec_f \mathfrak{B}$.[7]

La siguiente afirmación nos permite observar lo fuerte que es que un monomorfismo sea cerrado.

Proposición 4.4.2. *Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$ cuasiminimal excelente tales que existe $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ monomorfismo cerrado y $dim(\mathfrak{A}) \geq \aleph_0$ entonces $\mathfrak{A} \prec_f \mathfrak{B}$.*

Demostración. Demostraremos por inducción sobre la formación de fórmulas que dada φ una fórmula y $\{a_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}} \subseteq A$ tenemos que

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\{a_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}] \text{ sii } \mathfrak{B} \models \varphi[\{f(a_i)\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}].$$

[7]La definición es análoga a la de encaje elemental en la lógica de primer orden.

Si φ atómica, $\varphi = \neg\alpha$ y $\varphi = \bigwedge_{i\in\omega} \alpha_i$ como por hipótesis tenemos que f es monomorfismo por el lema 1.2.1 tenemos el resultado.

Considere $\varphi = \exists v\alpha(v, \bar{w})$ y $\{a_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}} \in A$. La ida es trivial usando la definición de satisfacibilidad y la hipótesis de inducción por lo que únicamente haremos la vuelta. Para simplificar la escritura definamos $\bar{a} = \{a_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$.

Supongamos que

$$\mathfrak{B} \models \exists v\alpha(v, \bar{a}),$$

entonces por definición de satisfacibilidad de Tarski hay $b \in B$ tal que

$$\mathfrak{B} \models \alpha[b, \bar{a}].$$

Si $b \in f(A)$ por hipótesis de inducción terminamos entonces supongamos que $b \notin f(A)$.

Como la $dim(\mathfrak{A}) \geq \aleph_0$ hay un $c \in A \backslash cl_{\mathfrak{A}}(\bar{a})$. Debido a que f es inyectiva $f(c) \in f(A)\backslash f(cl_{\mathfrak{A}}(\bar{a}))$, por lo que $f(c) \in B\backslash f(cl_{\mathfrak{A}}(\bar{a}))$. Note que como $b \notin f(A)$ y dado que $cl_{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \subseteq A$ se sigue que $b \in B\backslash f(cl_{\mathfrak{A}}(\bar{a}))$.

Como f es cerrado se tiene que $f(cl_{\mathfrak{A}}(\bar{a}))$ es cerrado y ya que $b \notin f(cl_{\mathfrak{A}}(\bar{a}))$ y $f(c) \notin f(cl_{\mathfrak{A}}(\bar{a}))$ por el corolario 4.2.1 tenemos que

$$tp_{qf_{\mathfrak{B}}}(b/f(cl(\bar{a}))) = tp_{qf_{\mathfrak{B}}}(f(c)/f(cl(\bar{a}))).$$

Por la proposición 4.3.3 o 4.3.5, según sea la dimensión de $\mathfrak{B}$, tenemos un σ automorfismo de $\mathfrak{B}$ que deja fijo a $f(cl_{\mathfrak{A}}(\bar{a})))$ y tal que $\sigma(b) = f(c)$. Por lo que:

$$\mathfrak{B} \models \alpha[b, f(\bar{a})] \text{ sii } \mathfrak{B} \models \alpha[f(c), f(\bar{a})].$$

Por lo tanto, por hipótesis de inducción

$$\mathfrak{A} \models \alpha[c, \bar{a}]$$

y por definición de satisfacibilidad

$$\mathfrak{A} \models \exists v\alpha(v, \bar{a}).$$

□

Definición 4.4.2. Decimos que $\langle\mathfrak{A}_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ es una cadena cerrada si:

1. Para toda $\alpha \leq \beta < \kappa$ se tiene que existe $f_{\alpha,\beta} : \mathfrak{A}_\alpha \to \mathfrak{A}_\beta$ monomorfismo cerrado.
2. Para toda $\alpha < \kappa$ se tiene que $f_{\alpha,\alpha} = Id_{\mathfrak{A}_\alpha}$.
3. Para todos $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \kappa$ se tiene que $f_{\beta,\gamma} \circ f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\gamma}$.

En particular, una cadena cerrada es un sistema dirigido de monomorfismos cerrados.

Definición 4.4.3. Diremos que una clase de estructuras $\mathcal{D}$ es cerrada bajo uniones de cadenas cerradas, si para toda cadena cerrada $\langle\mathfrak{A}_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ existe

$$< \mathfrak{A}_\kappa = lim_{\to}\mathfrak{A}_\alpha, \{f_{\alpha,\kappa}\}_{\alpha<\kappa} >$$

tal que:

1. $\mathfrak{A}_\kappa \in \mathcal{D}$.

2. Para toda $\alpha < \kappa$, $f_{\alpha,\kappa} : \mathfrak{A}_\alpha \to \mathfrak{A}_\kappa$ es monomorfismo cerrado.

3. $\alpha < \beta < \gamma \leq \kappa$ se tiene que $f_{\beta,\gamma} \circ f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\gamma}$.

Note que el concepto anterior es el concepto de límite directo en el sentido categórico.

Proposición 4.4.3. *Sea $\mathcal{C}$ una clase cuasiminimal excelente tal que $\mathcal{C}$ es definible por $T_{\mathcal{C}}$ en $L_{\omega_1,\omega}$ excepto CN (pues ello se encuentra fuera de $L_{\omega_1,\omega}$) y la cerradura es definible en $L_{\omega_1,\omega}$.*[8] *Entonces*

$$\mathcal{C}' = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} | \mathfrak{A} \text{ es de dimensión infinita}\}$$

es cerrada bajo uniones de cadenas cerradas.

Demostración. Sea $\langle \mathfrak{A}_\alpha \rangle_{\alpha \in \kappa}$ una cadena cerrada de elementos de $\mathcal{C}'$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$.

Sea $B = \bigcup_{\alpha \in \kappa} A_\alpha$ y dados $a, b \in B$ tales que $a \in A_{\alpha_0}$ y $b \in A_{\beta_0}$ diremos que

$$a \sim b \text{ sii } \exists \alpha \in \kappa (f_{\alpha_0,\alpha}(a) = f_{\beta_0,\alpha}(b)).$$

Afirmamos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

1. **Reflexividad:** Dado $a \in B$ tal que $a \in A_\alpha$ se tiene que $f_{\alpha,\alpha}(a) = f_{\alpha,\alpha}(a)$. Por ende, $a \sim a$.

2. **Simetría:** Se sigue de la simetría de la igualdad.

3. **Transitividad:** Sean $a, b, c \in B$ tal que $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $c \in A_\gamma$, $a \sim b$ y $b \sim c$. De donde por definición existe δ_1 y δ_2 tal que $f_{\alpha,\delta_1}(a) = f_{\beta,\delta_1}(b)$ y $f_{\beta,\delta_2}(b) = f_{\gamma,\delta_2}(c)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\delta_1 < \delta_2$, por lo que aplicando f_{δ_1,δ_2} la primera igualdad se tiene que:
$$f_{\delta_1,\delta_2} o f_{\alpha,\delta_1}(a) = f_{\delta_1,\delta_2} \circ f_{\beta,\delta_1}(b).$$
De donde por la propiedad tres de ser cadena se sigue que:
$$f_{\alpha,\delta_2}(a) = f_{\beta,\delta_2}(b).$$
Pero debido a que $f_{\beta,\delta_2}(b) = f_{\gamma,\delta_2}(c)$, concluimos que:
$$f_{\alpha,\delta_2}(a) = f_{\gamma,\delta_2}(c).$$
Por lo tanto, $a \sim c$.

Como es una relación de equivalencia, nos genera una partición, por lo que definimos:

$$\langle \mathfrak{A}, cl^{\mathfrak{A}} \rangle := \langle \langle B/\sim, I \rangle, cl^{\mathfrak{A}} \rangle.$$

Donde la I se refiere a la interpretación del lenguaje[9], la cual definimos de la siguiente manera:

1. **Constantes:** Dada c una constante definimos $c^{\mathfrak{A}} = [c^{\mathfrak{A}_\alpha}]$ para alguna $\alpha \in \kappa$.

[8]Es decir, $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ sii $\mathfrak{A} \models T_C$ y la cerradura $cl_{\mathfrak{A}}$ es aquella determinada por la definción en $L_{\omega_1,\omega}$.
[9]Ver definición 1.1.2.

2. **Relaciones:** Dada R una relación $n-$aria y $[a_1], ..., [a_n] \in A$ tal que $a_1 \in A_{\alpha_1}, ..., a_n \in A_{\alpha_n}$ definamos:

$$\langle [a_1], ..., [a_n] \rangle \ \in R^{\mathfrak{A}} \ \text{ sii } \ \exists \alpha \in \kappa(\langle f_{\alpha_1,\alpha}(a_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha}(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{A}_\alpha}).$$

3. **Funciones:** Dada F una función $n-$aria, $[a_1], ..., [a_n] \in A$ tal que $a_1 \in A_{\alpha_1}, ..., a_n \in A_{\alpha_n}$ y sea $\alpha = max\{\alpha_m | m \in \{1, ..., n\}\}$. Definamos:

$$F^{\mathfrak{A}}([a_1], ..., [a_n]) = [f^{\mathfrak{A}_\alpha}(f_{\alpha_1,\alpha}(a_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha}(a_n)).]$$

Donde $cl_{\mathfrak{A}}$ la definimos como sigue:

1. **Caso finito:** Si $X = \{[x_1], ..., [x_n]\}$ tal que $x_1 \in A_{\alpha_1}, ..., x_n \in A_{\alpha_n}$ y $a \in A_{\alpha_0}$ entonces definamos:

$$[a] \in cl_{\mathfrak{A}}(X) \ \text{ sii } \ \ \exists \alpha \in \kappa(f_{\alpha_0,\alpha}(a) \in cl_{\mathfrak{A}^\alpha}(\{f_{\alpha_1,\alpha}(x_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha}(x_n)\})).$$

2. **Caso infinito:** Dado $X \subseteq A$ infinito, definimos:

$$cl_{\mathfrak{A}}(X) := \bigcup_{Y \subseteq_{fin} X} cl_{\mathfrak{A}}(Y).$$

Antes de demostrar que todo se encuentra bien definido, note que si $a \in A_{\alpha_0}$ y $b \in A_{\alpha_1}$ son tales que $f_{\alpha_0,\alpha}(a) = f_{\alpha_1,\alpha}(b)$ entonces para todo $\beta > \alpha$ se tiene que $f_{\alpha_0,\beta}(a) = f_{\alpha_1,\beta}(b)$.

Afirmamos que la interpretación se encuentra bien definida.

1. **Constantes:** Sean $\alpha, \beta \in \kappa$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha < \beta$. Note que como $f_{\delta,\gamma}$ es homomorfismo para todos $\delta, \gamma \in \kappa$, se tiene que:

$$f_{\alpha,\beta}(c^{\mathfrak{A}_\alpha}) = c^{\mathfrak{A}_\beta} = f_{\beta,\beta}(c^{\mathfrak{A}_\beta}).$$

Por lo tanto, para todo $\alpha, \beta \in \kappa$ se tiene que $c^{\mathfrak{A}_\alpha} \sim c^{\mathfrak{A}_\beta}$. Por lo que $c^{\mathfrak{A}}$ está bien definida.

2. **Relaciones:** Sean R una relación $n-$aria, $a_i \in A_{\alpha_i}$ con $i \in \{1, ..., n\}$, $a'_i \in A_{\alpha'_i}$ con $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $a_i \sim a'_i$ con $i \in \{1, ..., n\}$ por β_i. Supongamos que existe α tal que:

$$\langle f_{\alpha_1,\alpha}(a_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha}(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{A}_\alpha}.$$

Sea $\alpha' = max\{\beta | \beta = \alpha \vee (\bigvee_{i \in \{1,...,n\}} \beta = \beta_m)\}$. Como $f_{\alpha,\alpha'}$ es homomorfismo:

$$\langle f_{\alpha,\alpha'} \circ f_{\alpha_0,\alpha}(a_1), ..., f_{\alpha,\alpha'} \circ f_{\alpha_n,\alpha}(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{A}_{\alpha'}}.$$

De donde por la propiedad tres de ser cadena:

$$\langle f_{\alpha_1,\alpha'}(a_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha'}(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{A}_{\alpha'}}.$$

Por la observación previa a la afirmación tenemos que $f_{\alpha_i,\alpha'}(a_i) = f_{\alpha'_i,\alpha'}(a'_i)$ con $i \in \{1, ..., n\}$. De donde concluimos que:

$$\langle f_{\alpha'_1,\alpha'}(a'_1), ..., f_{\alpha'_n,\alpha'}(a'_n) \rangle \in R^{\mathfrak{A}_{\alpha'}}.$$

Por lo tanto, las relaciones se encuentran bien definidas.

3. **Funciones:** La prueba es análoga a la de las relaciones.

Por lo que la interpretación se encuentra bien definida, ahora procedamos a la cerradura.

1. **Caso finito:** Sean $a \in A_{\alpha_0}$ y $a' \in A_{\alpha'_0}$ tal que $a \sim a'$ por β_0. Sean $x_i \in A_{\alpha_i}$ con $i \in \{1, ..., n\}$ y $x'_i \in A_{\alpha'_i}$ con $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $x_i \sim x'_i$ con $i \in \{1, ..., n\}$ por β_i. Supongamos que existe α tal que:
$$f_{\alpha_0,\alpha}(a) \in cl_{\mathfrak{A}^\alpha}(f_{\alpha_1,\alpha}(x_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha}(x_n)).$$
Como la cerradura es definible, supongamos que por ϕ_{cl} entonces se tiene que:
$$\mathfrak{A}_\alpha \vDash \phi_{cl}[f_{\alpha_0,\alpha}(a), f_{\alpha_1,\alpha}(x_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha}(x_n)].$$
Sea $\alpha' = max\{\beta | \beta = \alpha \vee (\bigvee_{i \in \{0,...,n\}} \beta = \alpha_i)\}$. Note que como $f_{\alpha,\alpha'}$ es monomorfismo cerrado por la proposición 4.4.2 es fuerte y por ende:
$$\mathfrak{A}_{\alpha'} \vDash \phi_{cl}[f_{\alpha,\alpha'} \circ f_{\alpha_0,\alpha}(a), f_{\alpha,\alpha'} \circ f_{\alpha_1,\alpha}(x_1), ..., f_{\alpha,\alpha'} \circ f_{\alpha_n,\alpha}(x_n)].$$
De donde por la parte tres de la definición de cadena:
$$\mathfrak{A}_{\alpha'} \vDash \phi_{cl}[f_{\alpha_0,\alpha'}(a), f_{\alpha_1,\alpha'}(x_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha'}(x_n)].$$
Pero debido a la observación previa a la afirmación anterior se tiene que $f_{\alpha_i,\alpha'}(x_i) = f_{\alpha'_i,\alpha'}(x'_i)$ con $i \in \{1, ..., n\}$ y $f_{\alpha_0,\alpha'}(a) = f_{\alpha'_0,\alpha'}(a')$. Por lo que
$$\mathfrak{A}_{\alpha'} \vDash \phi_{cl}[f_{\alpha_0,\alpha'}(a'), f_{\alpha_1,\alpha'}(x'_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha'}(x'_n)],$$
de ahí que
$$f_{\alpha_0,\alpha'}(a') \in cl_{\mathfrak{A}^{\alpha'}}(f_{\alpha'_1,\alpha'}(x'_1), ..., f_{\alpha'_n,\alpha'}(x'_n)).$$
Por lo tanto, en el caso finito la cerradura se encuentra bien definida.

2. **Caso infinito:** Se sigue del hecho de que en el caso finito está bien definida.

Observe que $cl^{\mathfrak{A}}$ define una pregeomtería debido a que el caso infinito se reduce al finito y a que el caso finito está determinado por ϕ_{cl} que por hipótesis define un operador cerradura.

Definamos las funciones $\{f_{\alpha,\kappa}\}_{\alpha \leq \kappa}$. Para $\alpha < \kappa$ sea
$$\begin{aligned} f_{\alpha,\kappa} :& \mathfrak{A}_\alpha \to \mathfrak{A} \\ & a \mapsto [a] = [f_{\alpha,\alpha+1}(a)] \end{aligned}$$
y definamos $f_{\kappa,\kappa} := Id_{\mathfrak{A}}$. Claramente $f_{\kappa,\kappa}$ es monomorfismo cerrado.

Afirmamos que $f_{\alpha,\kappa}$ es monomorfismo para todo $\alpha < \kappa$.

1. **Inyectividad:** Sean $a_1, a_2 \in A_\alpha$ tal que $f_{\alpha,\kappa}(a_1) = [a_1] = [a_2] = f_{\alpha,\kappa}(a_2)$. Entonces existe un β tal que $f_{\alpha,\beta}(a_1) = f_{\alpha,\beta}(a_2)$ y como $f_{\alpha,\beta}$ es inyectiva se tiene que $a_1 = a_2$. Por ende $f_{\alpha,\kappa}$ es inyectiva.

2. **Homomorfismo:**

   a) **Constantes:** Sea c una constante entonces $f_{\alpha,\kappa}(c^{\mathfrak{A}_\alpha}) = [c^{\mathfrak{A}_\alpha}]$ por definición de $f_{\alpha,\kappa}$ pero por definición de la interpretación en $\mathfrak{A}$ se tiene que $[c^{\mathfrak{A}_\alpha}] = c^{\mathfrak{A}}$. Por lo que, $f_{\alpha,\kappa}(c^{\mathfrak{A}_\alpha}) = c^{\mathfrak{A}}$.

b) **Relaciones:** Sean R una relación $n-$aria y $a_1, ..., a_n \in A_\alpha$.
$\boxed{\rightarrow}$ Supongamos que:

$$\langle a_1, ..., a_n\rangle \in R^{\mathfrak{A}_\alpha}$$

Ello pasa si y sólo si

$$\langle f_{\alpha,\alpha}(a_1), ..., f_{\alpha,\alpha}(a_n)\rangle \in R^{\mathfrak{A}_\alpha}$$

al ser $f_{\alpha,\alpha}$ la identidad. Lo cual implica que

$$\langle [a_1], ..., [a_n]\rangle \in R^{\mathfrak{A}}$$

por la definición de la interpretación en $\mathfrak{A}$.
$\boxed{\leftarrow}$ Supongamos que:

$$\langle [a_1], ..., [a_n]\rangle \in R^{\mathfrak{A}}.$$

De donde por definición de la interpretación se tiene que existe un β tal que:

$$\langle f_{\alpha,\beta}(a_1), ..., f_{\alpha,\beta}(a_n)\rangle \in R^{\mathfrak{A}_\beta},$$

pero como $f_{\alpha,\beta}$ es homomorfismo ello es equivalente a que:

$$\langle a_1, ..., a_n\rangle \in R^{\mathfrak{A}_\alpha}.$$

c) **Funciones:** Sean F una función $n-$aria y $a_1, ..., a_n \in A_\alpha$. Por definición de $f_{\alpha,\kappa}$ se tiene que:

$$f_{\alpha,\kappa}(F^{\mathfrak{A}_\alpha}(a_1, ..., a_n)) = [F^{\mathfrak{A}_\alpha}(a_1, ..., a_n)].$$

Pero por definición de la interpretación:

$$[F^{\mathfrak{A}_\alpha}(a_1, ..., a_n)] = F^{\mathfrak{A}}([a_1], ..., [a_n]).$$

De donde, debido a que $f_{\alpha,\kappa}(a_i) = [a_i]$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ concluimos que:

$$f_{\alpha,\kappa}(F^{\mathfrak{A}_\alpha}(a_1, ..., a_n)) = F^{\mathfrak{A}}(f_{\alpha,\kappa}(a_1), ..., f_{\alpha,\kappa}(a_n)).$$

Por lo tanto, $f_{\alpha,\kappa}$ es monomorfismo.

Antes de pasar a la prueba de que es cerrado, será necesario primero ver que si $X \subseteq_{fin} A$ entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $cl_{\mathfrak{A}}(X) = f_{\alpha,\kappa}(cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f^{-1}_{\alpha,\kappa}(X)))$.

Observe que dado $[a] \in A$ existe un único elemento $b \in [a]$ tal que $b \in A_\alpha$ para $\alpha = min\{\beta | \exists c \in [a] \text{ tal que } c \in A_\beta\}$. La unicidad de b se debe a que para todo κ $f_{\alpha,\kappa}$ es inyectiva. Entonces dado X existen $x_1, ..., x_n$ mínimos tales que $x_i \in A_{\alpha_i}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$ y $X = \{[x_1], ..., [x_n]\}$. Sea $\alpha = max\{\alpha_i | i \in \{1, ..., n\}\}$ entonces se tiene que $f^{-1}_{\alpha,\kappa}(X) = \{f_{\alpha_1,\alpha}(x_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha}(x_n)\}$.

Afirmamos que $cl_{\mathfrak{A}}(X) = f_{\alpha,\kappa}(cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f^{-1}_{\alpha,\kappa}(X)))$.

- $\boxed{\subseteq}$ Sea $[a] \in cl_{\mathfrak{A}}(X)$ tal que $a \in A_{\alpha_0}$ entonces existe un α' tal que $f_{\alpha_0,\alpha'}(a) \in cl_{\mathfrak{A}_{\alpha'}}(f_{\alpha_1,\alpha'}(x_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha'}(x_n))$.
  Ahora bien, como $\alpha' \geq \alpha$ y $f_{\alpha,\alpha'}$ es cerrado por la proposición 4.3.2 y la propiedad tres de cadenas cerradas tenemos que:

  $$f_{\alpha,\alpha'}(cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f_{\alpha_1,\alpha}(x_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha}(x_n))) = cl_{\mathfrak{A}_{\alpha'}}(f_{\alpha_1,\alpha'}(x_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha'}(x_n)).$$

  De donde, existe $b \in cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f_{\alpha_1,\alpha}(x_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha}(x_n))$ tal que $f_{\alpha,\alpha'}(b) = f_{\alpha_0,\alpha'}(a)$, es decir, $a \sim b$. Como claramente $f_{\alpha,\kappa}(b) \in f_{\alpha,\kappa}(cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f^{-1}_{\alpha,\kappa}(X)))$ y $[a] = [b]$, concluimos que:

  $$[a] \in f_{\alpha,\kappa}(cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f^{-1}_{\alpha,\kappa}(X))).$$

- $\boxed{\supseteq}$ Sea $[a] \in f_{\alpha,\kappa}(cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f^{-1}_{\alpha,\kappa}(X)))$ tal que $a \in A_{\alpha_0}$ entonces existe
$$b \in cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f_{\alpha_1,\alpha}(x_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha}(x_n)) \subseteq A_\alpha$$
y β tal que $f_{\alpha,\beta}(b) = f_{\alpha_0,\beta}(a)$. Como $f_{\alpha,\beta}$ es cerrado se sigue que:
$$f_{\alpha_0,\beta}(a) \in cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f_{\alpha_1,\beta}(x_1), ..., f_{\alpha_n,\beta}(x_n)).$$
Por ende, por la definición de la cerradura $[a] \in cl_{\mathfrak{A}}(X)$.

De dicho hecho, se sigue que dado $X \subseteq A$ tenemos que:
$$cl_{\mathfrak{A}}(X) = \bigcup_{Y \subseteq_{fin} X} f_{\alpha,\kappa}(cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f^{-1}_{\alpha,\kappa}(Y))).$$ [10]

Con ello en mente estamos listos para demostrar que para todo $\alpha < \kappa$ $f_{\alpha,\kappa}$ es cerrado.
Sea $X \subseteq A_\alpha$ cerrado. Demostremos que $f_{\alpha,\kappa}(X) = cl_{\mathfrak{A}}(f_{\alpha,\kappa}(X))$

- $\boxed{\subseteq}$ Como $cl_{\mathfrak{A}}$ es una pregeometría se tiene que $f_{\alpha,\kappa}(X) \subseteq cl_{\mathfrak{A}}(f_{\alpha,\kappa}(X))$.

- $\boxed{\supseteq}$ Sea $[a] \in cl_{\mathfrak{A}}(f_{\alpha,\kappa}(X))$, por definición, existe $Y \subseteq_{fin} X$ tal que $[a] \in cl_{\mathfrak{A}}(f_{\alpha,\kappa}(Y))$ y $a \in A_{\alpha_0}$ mínimo. Sea $f_{\alpha,\kappa}(Y) = \{[y_1], ..., [y_n]\}$ donde los y_i cumplen con el principio de minimalidad de la afirmación anterior y tales que $y_i \in A_{\alpha_i}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Debido a que $Y \subseteq X \subseteq A_\alpha$ se tiene que $\alpha_i \leq \alpha$ para toda i.

  Por la afirmación anterior, tenemos que existe $\alpha' < \alpha$ tal que
$$cl_{\mathfrak{A}}(f_{\alpha,\kappa}(Y)) = f_{\alpha',\kappa}(cl_{\mathfrak{A}_{\alpha'}}(f^{-1}_{\alpha',\kappa}(Y))).$$
  Ya que $f^{-1}_{\alpha',\kappa}([Y]) = \{f_{\alpha_1,\alpha'}(y_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha'}(y_n)\}$ y que $f_{\alpha',\alpha}$ es cerrado se tiene que:
$$f_{\alpha_0,\alpha}(a) \in cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f_{\alpha_1,\alpha}(y_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha}(y_n)).$$
  Dado que $\{f_{\alpha_1,\alpha}(y_1), ..., f_{\alpha_n,\alpha}(y_n)\} = f^{-1}_{\alpha,\kappa}([Y]) = Y$ se tiene que:
$$f_{\alpha_0,\alpha}(a) \in cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(Y) \subseteq cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(X) = X.$$
  La contención se debe a que $cl_{\mathfrak{A}_\alpha}$ es monótona y la última igualdad se debe a que X es cerrado. Por lo que concluimos que $[a] \in f_{\alpha,\kappa}(X)$.

Por lo tanto, $f_{\alpha,\kappa}$ es monomorfismo cerrado y por ende se cumple la condición 2. de ser cerrado bajo uniones de cadenas cerradas.

Note que si $\alpha < \beta < \kappa$ se tiene que $f_{\beta,\kappa} \circ f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\kappa}$ debido a que dado $a \in A_\alpha$ se cumple que $a \sim f_{\alpha,\beta}(a)$. Por ello, se cumple la condición 3. de ser cerrado bajo uniones de cadenas cerradas.

Además, como
$$\mathfrak{A}_0 \models T_C$$
y $f_{1,\kappa}$ es monomorfismo cerrado, por la proposición 4.4.2 concluimos que:
$$\mathfrak{A} \models T_C.$$

[10] Note que la α depende de Y.

Dado que existe una copia de $\mathfrak{A}_1$ en $\mathfrak{A}$ al ser $f_{1,\kappa}$ inyectiva es claro que la dimensión de $\mathfrak{A}$ es infinita.

Queda ver que $\mathfrak{A}$ satisface CN, dado que dicha propiedad no es expresable en $L_{\omega_1,\omega}$. Para ello, sea $X \subseteq_{fin} A$ tal que $X = \{[x_1], ..., [x_n]\}$ donde $x_i \in A_{\alpha_i}$ con $i \in \{1, ..., n\}$ son mínimos. De donde para $\alpha = max\{\alpha_i | i \in \{1, ..., n\}\}$ se tiene que

$$cl_{\mathfrak{A}}(X) = f_{\alpha,\kappa}(cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f^{-1}_{\alpha,\kappa}(X))).$$

Como $f_{\alpha,\kappa}$ es inyectiva y $\mathfrak{A}_\alpha$ satisface CN concluimos que:

$$|cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(f^{-1}_{\alpha,\kappa}(X)))| \leq \aleph_0.$$

Debido a que al tomarnos las clases la cardinalidad a lo más decrece se sigue que:

$$|cl_{\mathfrak{A}}(X)| \leq \aleph_0.$$

Por lo tanto $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}'$, es decir, $\mathcal{C}'$ es cerrada bajo uniones de cadenas cerradas.

Un último hecho que será sumamente importante al probar el siguiente teorema es que

$$dim(\mathfrak{A}_\kappa) = sup\{dim(\mathfrak{A}_\alpha) | \alpha < \kappa\}.$$

Primero note que si $B \subseteq A_\alpha$ es independiente entonces para todo $\gamma > \alpha$ se tiene que $f_{\alpha,\gamma}(B) \subseteq A_\gamma$ es independiente, ello se sigue directo de la definición de clase cuasiminimal excelente 1.d).

Para ver que se cumple la afirmación, contruyamos una base para $\mathfrak{A}_\kappa$ por recursión sobre los ordinales menores a κ.

- Si $\alpha = 0$, sea B_0 una base de $\mathfrak{A}_0$.
- Si $\alpha = \beta + 1$, sea $B_{\beta+1}$ base de $\mathfrak{A}_{\beta+1}$ que extiende al conjunto independiente $f_{\beta,\beta+1}(B_\beta)$.
- Si α es limite, sea B_α base de $\mathfrak{A}_\alpha$ que extiende al conjunto independiente $\bigcup_{\beta<\alpha} f_{\beta,\alpha}(B_\alpha)$.

Con ello definamos $B = [\bigcup_{\alpha<\kappa} B_\kappa]$. Afirmamos que B es base de $\mathfrak{A}_\kappa$, es decir, que genera y es independiente.

1. **Genera:** Sea $[a] \in A_\kappa$ y sea $b \in [a]$ tal que $b \in A_\alpha$ para α mínimo y supongamos que $f_{\alpha_0,\gamma}(a) = f_{\alpha,\gamma}(b)$. Al ser B_α base se tiene que $b \in cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(B_\alpha)$, entonces existe $B' = \{b_1, ..., b_n\} \subseteq B_\alpha$ tal que $b \in cl_{\mathfrak{A}_\alpha}(B')$.

   Como $a \sim b$ por γ, α es mínimo y $f_{\alpha,\gamma}$ cerrado:

   $$f_{\alpha_0,\gamma}(a) \in cl_{\mathfrak{A}_\gamma}(f_{\alpha,\gamma}(B')).$$

   Por lo que por definición concluimos que $[a] \in cl_{\mathfrak{A}}([B'])$ y como $[B'] \subseteq B$ se tiene que $[a] \in cl_{\mathfrak{A}}(B)$.

   Por lo tanto, B genera.

2. **Independiente:** Sea $[b] \in B$. Procedamos por contradicción, supongamos que $[b] \in cl_{\mathfrak{A}}(B \backslash \{[b]\})$ entonces por finitud hay $B' = \{[b_1], ..., [b_n]\}$ donde b_i son mínimos tal que $[b] \in cl_{\mathfrak{A}}(B' \backslash \{[b]\})$ y supongamos que $b \in A_\alpha$ y $b_i \in A_{\alpha_i}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. De donde por definición existe un β tal que:

   $$f_{\alpha,\beta}(b) \in cl_{\mathfrak{A}_\beta}(\{f_{\alpha_i,\beta}(b_i) | i \in \{1, ..., n\}\} \backslash \{f_{\alpha,\beta}(b)\})$$

   Pero note que $\{f_{\alpha_i,\beta}(a_i) | i \in \{1, ..., n\}\} \cup \{f_{\alpha,\beta}(b)\} \subseteq B_\beta$, lo cual es una contradicción con la independencia de B_β. Ergo, B es independiente.

Dado que $|B| = sup\{dim(\mathfrak{A}_\alpha)|\alpha < \kappa\}$, se tiene la afirmación deseada, es decir, que $dim(\mathfrak{A}_\kappa) = sup\{dim(\mathfrak{A}_\alpha)|\alpha < \kappa\}$. □

Con dicha proposición, ahora sí estamos en posición de demostrar el gran teorema de esta sección.

Teorema 4.4.1. *Sea $\mathcal{C}$ una clase cuasiminimal excelente tal que $\mathcal{C}$ es definible por $T_\mathcal{C}$ en $L_{\omega_1,\omega}$ excepto CN y la cerradura es definible en $L_{\omega_1,\omega}$. Si hay un $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ de dimensión infinita, entonces hay elementos de $\mathcal{C}$ de cardinalidad (dimensión) arbitraria que satisfacen CN.*

Demostración. Lo que haremos será construir por recursión sobre los ordinales infinitos una cadena cerrada $\langle \mathfrak{A}_\alpha \rangle_{\alpha \in OR \setminus \omega}$[11]tal que para todo $\mathfrak{A}_\alpha$ se tenga que $\mathfrak{A}_\alpha \in \mathcal{C}$, $dim(\mathfrak{A}_\alpha) = |\alpha|$, α enumere una base de $\mathfrak{A}_\alpha$ y tal que el monomorfismo cerrado de $\mathfrak{A}_\alpha$ a $\mathfrak{A}_\gamma$ se extiende a una inmersión de ordinales de α a γ que respeta las bases si $\alpha < \gamma$.

- Como $\mathcal{C}$ es una clase cuasiminimal excelente con un modelo infinito, por proposición 4.4.1 tenemos $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ tal que $dim(\mathfrak{A}) = |\omega|$. Sea $\mathfrak{A}_\omega = \mathfrak{A}$ y enumeremos una de sus bases con ω.

- Si $\alpha = \beta + 1$, por hipótesis de inducción hay $\mathfrak{A}_\beta$ tal que $dim(\mathfrak{A}_\beta) = |\beta| = |\alpha|$. Como β es biyectable con $\beta + 1$, sea $\mathfrak{A}_{\beta+1} = \mathfrak{A}_\beta$. Sea $\{b_i\}_{i<\beta}$ la enumeración canónica de la base de $\mathfrak{A}_\beta$ y enumerémoslo ahora de la siguiente manera:

  - $b'_0 := b_\beta$.
  - $b'_j := b_{i-1}$ si $j \in \omega \setminus \{0\}$.
  - $b'_j = b_i$ si $i > \omega$.

  Note que $\{b'_j\}_{j\in\beta+1\setminus\{\beta\}}$ es biyectable con $\{b_i\}_{i<\beta}$ por lo que por el teorema 4.3.3 hay $f_{\beta,\beta+1} : \mathfrak{A}_\beta \to \mathfrak{A}_{\beta+1}$ monomorfismo cerrado que respeta la biyección dada. Claramente $\mathfrak{A}_{\beta+1} \in \mathcal{C}$. Además, definamos para toda $\alpha < \beta + 1$

  $$f_{\alpha,\beta+1} := f_{\beta,\beta+1} o f_{\alpha,\beta}.$$

  Note que es cerrado al ser composición de monomorfismos cerrados, por cómo se definió se cumple la parte 2. de la definición de cadenas cerradas y cumple que los monomorfismos cerrados son inmersión de ordinales que respetan las bases.

- Si α es límite, realice la construcción de la proposición anterior. Respetando las enumeraciones de las bases anteriores.

Por lo tanto, para cada ordinal α existe un $\mathfrak{A}_\alpha \in \mathcal{C}$. De donde concluimos que para todo κ cardinal hay un $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$ tal que $dim(\mathfrak{B}) = \kappa$. □

Con lo que queda demostrada la existencia. Concluyamos con la prueba del Teorema*.

Teorema*. *Si $\mathcal{C}$ es una clase cuasiminimal excelente definida por $T_\mathcal{C}$ en $L_{\omega_1,\omega}$ excepto CN, el operador cerradura es definible en $L_{\omega_1,\omega}$ y tiene un modelo de dimensión infinita entonces $\mathcal{C}$ es no numerable categórica.*

[11]Donde OR es la clase de todos los ordinales.

Demostración. Por el teorema anterior sabemos que hay al menos un modelo de cada cardinalidad no numerable y por los teoremas 4.3.2 y 4.3.3 hay a lo más uno. Por lo tanto, hay un único modelo para cualquier κ no numerable, es decir, $\mathcal{C}$ es no numerable categórica. □

Con ello terminamos nuestro estudio de las clases cuasiminimal excelentes en general, es momento de enfocarnos en los campos pseudo-exponenciales y ver que estos forman una clase cuasiminimal excelente.

Capítulo 5

$\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ es no numerable categórica

La prueba de que $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ es no numerable categórica será vía el Teorema*, es decir, tendremos que demostar que $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ satisface todas la hipótesis de dicho teorema; las hipótesis de éste son:

1. $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ está definida en $L_{\omega_1,\omega}$ salvo CN.

2. La cerradura es definible en $L_{\omega_1,\omega}$.

3. $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ es cuasiminimal excelente.

4. $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ tiene un modelo de dimensión infinita.

Afortunadamente 1. y 2. se siguen del capítulo 2, por como se definió $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ [1], y 4. es lo que se realiza en el apéndice C. Por lo tanto, sólo nos queda demostrar que $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ es una clase cuasiminimal excelente, pero como veremos requerirá de bastante trabajo demostrarlo.

La forma en cómo procederemos es ir demostrando que $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ satisface cada uno de los puntos de la definición de clase cuasiminimal excelente enunciada en la sección 4.2.

5.1. Condición 1.

Primero probaremos los dos hechos más sencillos, es decir que se satisfacen 1. a) y 1. b) de la definición 4.2.3. Recordemos que L es el lenguaje de los campos pseudo-exponenciales que se encuentra al inicio del capítulo 2 y L^* es la extensión del lenguaje que se hizo en la sección 2.5. También es pertienente que el lector recuerde la defínción de $Ecl_{\mathfrak{A}}$, que es precisamente la definición 2.3.2 de este documento.

Lema 5.1.1. *Sean $\langle \mathfrak{A}, Ecl_{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\langle \mathfrak{B}, Ecl_{\mathfrak{B}} \rangle$ dos L^*-estructuras tal que $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ y $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un L^*-isomorfismo tal que para todo $X \subseteq A$ y $a \in A$ se satisface que $a \in Ecl_{\mathfrak{A}}(X)$ sii $f(a) \in Ecl_{\mathfrak{B}}(f(X))$. Entonces $\mathfrak{B} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ con $Ecl_{\mathfrak{B}}$.*

[1] La propiedad 1. es básicamente la axiomatización y la propiedad 2. es la proposición 2.3.2.

Demostración. Como por hipótesis $\mathfrak{A}$ es isomorfa a $\mathfrak{B}$, ambas estructuras satisfacen exactamente las mismas fórmulas en $L_{\omega_1,\omega}$ por el lema 1.2.1. Por lo tanto, como $\mathfrak{A} \models T_{\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}}$ entonces $\mathfrak{B} \models T_{\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}}$. De ahí que $\mathfrak{B} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ con $Ecl_{\mathfrak{B}}$. □

Lema 5.1.2. *Dadas $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ y el operador $Ecl_{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ entonces $\langle \mathfrak{A}, Ecl_{\mathfrak{A}} \rangle$ es una pregeometría, es decir:*

1. *Si $C \subseteq A$ entonces $C \subseteq Ecl(C)$ y $Ecl(Ecl(C)) = Ecl(C)$.*
2. *Si $C \subseteq B \subseteq A$ entonces $Ecl(C) \subseteq Ecl(B)$.*
3. *(Principio del intercambio) Si $C \subseteq A$, $a, b \in C$ y $a \in Ecl(C \cup \{b\})$ entonces $a \in Ecl(C)$ o bien $b \in Ecl(C \cup \{a\})$.*
4. *(Principio de finitud) Si $C \subseteq A$ y $c \in Ecl(C)$ entonces hay $C_0 \subseteq_{fin} C$ tal que $c \in Ecl(C_0)$.*
5. *(CN) Si $C \subseteq_{fin} A$ entonces $Ecl(C)$ es a lo más numerable.*

Demostración. 1. Es trivial el hecho que $C \subseteq Ecl(C)$. Demostremos que $Ecl(Ecl(C)) = Ecl(C)$. La contención $\boxed{\supseteq}$ se sigue de la primera afirmación, la segunda contención la haremos por casos.

a) **Caso 1:** Sean C finito y $a \in Ecl(Ecl(C))$. Por definición hay $X \subseteq_{fin} Ecl(C)$ tal que $a \in Ecl(X)$. A X lo podemos ver como $\{b_1, ..., b_m, c_1, ..., c_l\}$ tal que $\{b_1, ..., b_m\} \subseteq Ecl(C) \backslash C$ y $\{c_1, ..., c_l\} \subseteq C$. Aplicando el lema 2.3.2 (5) a los elementos de C que no están en X (podemos agregar todos al ser C finito), tenemos

$$\partial(\{a, b_1, ..., b_m\} \cup C) = \partial(\{b_1 ... b_m\} \cup C).$$

Ahora bien, como cada $b_i \in Ecl(C)$ se tiene que $\partial(\{b_i\} \cup C) = \partial(C)$ por lo que por el lema 2.3.2 (4) tenemos que

$$\partial(\{b_1, ..., b_m\} \cup C) = \partial(C).$$

De donde concluimos que:

$$\partial(\{a, b_1, ..., b_m\} \cup C) = \partial(C).$$

Aplicando el lema 2.3.2 (2) m veces nos queda que $\partial(\{a\} \cup C) = \partial(C)$, es decir, $a \in Ecl(C)$.

b) **Caso 2:** Sea C infinito. Como C es infinito es suficiente probar que dado $F \subseteq_{fin} Ecl(C)$ hay un $E \subseteq_{fin} C$ tal que $Ecl(F) \subseteq Ecl(E)$. Sea $a_1, ..., a_n$ una enumeración de los elementos de F. Dado $a_i \in F$ entonces por principio de finitud [2] hay un $E_{a_i} \subseteq_{fin} C$ tal que $a_i \in cl(E_{a_i})$. Como podemos hacer eso para cada i, considere $E = \bigcup_{i \in \{1,...,n\}} E_{a_i}$; note que $E \subseteq_{fin} C$ y que $F \subseteq_{fin} Ecl(E)$. Por ser Ecl monótona [3], $Ecl(F) \subseteq_{fin} Ecl(Ecl(E))$, pero al ser E finito por el inciso anterior $Ecl(Ecl(E)) = Ecl(E)$. De donde concluimos que $Ecl(F) \subseteq_{fin} Ecl(E)$.

[2] No lo hemos probado pero se realizará a continuación y la prueba no depende de que $Ecl(Ecl(C)) = Ecl(C)$.
[3] Nuevamente no lo hemos probado pero lo probaremos a continuación sin usar este hecho.

2. El único caso que no se sigue directo de la definición de Ecl es cuando tanto C como B son finitos, por lo que únicamente demostraremos dicho caso. Sea $a \in Ecl(C)$ entonces como C es finito por definición se tiene que
$$\partial(C \cup \{a\}) = \partial(C).$$
Luego como B es finito usando el lema 2.3.2 (5) para todo $b \in B \backslash C$ se tiene que
$$\partial(B \cup \{a\}) = \partial(B),$$
es decir, $a \in Ecl(B)$.

3. El caso en el C es infinito se sigue del caso en el que C finito, entonces únicamente haremos este último. Sea $a \in Ecl(C \cup \{b\}) \backslash Ecl(C)$. Por definición $\partial(\{a,b\} \cup C) = \partial(\{b\} \cup C)$ y dado que $a \notin Ecl(C)$ por definición $\partial(C) < \partial(\{a\} \cup C)$. Por lo tanto, del lema 2.3.2 (3) $\partial(\{a,b\} \cup C) = \partial(\{a\} \cup C)$, es decir, $b \in Ecl(C \cup \{a\})$.

4. Se sigue de la definición.

5. Es nuestro cuarto axioma de los campos pseudo-exponenciales.

□

Por ende $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ cumple con 1. a) y 1. b), para ver que cumple con 1.c) serán necesarias las siguientes proposiciones intermedias.

Proposición 5.1.1. *Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$, $X \subseteq A$ y $a \in Ecl(X)$ entonces para todo $b \in A$ tal que $E(b) = a$ tenemos que $b \in Ecl(X)$.*

Demostración. Como Ecl es monótona es suficiente demostrar que $b \in Ecl(\{a\})$, es decir, que $\partial(\{b,a\}) = \partial(\{a\})$.

Por el lema 2.3.2 (1) $\partial(\{a\}) \leq \partial(\{a,b\})$, por lo que demostraremos únicamente la otra desigualdad.

Por el lema 2.3.1, hay un X' que satisface $\{a\} \subseteq X' \subseteq_{fin} D$ y que $\delta(X') = \partial(\{a\})$. Note que como $E(b) = a$:
$$tr(X' \cup E(X') \cup \{E(b), b\}) = \begin{cases} tr(X' \cup E(X')) & \text{o} \\ tr(X' \cup E(X')) + 1 \end{cases}$$
y que:
$$lin(X' \cup \{b\}) = \begin{cases} lin(X') & \text{o} \\ lin(X') + 1 \end{cases}$$
Si sucede el caso uno respecto a la trascendencia es claro que $\delta(X' \cup \{b\}) \leq \delta(X')$. Mientras que si sucede el caso dos respecto a la trascendencia entonces $lin(X' \cup \{b\}) = lin(X') + 1$ pues si no, b no sería algebraicamente independiente de X'. Lo cual implica que también tengamos que $\delta(X' \cup \{b\}) \leq \delta(X')$.

Por lo tanto, en cualquier caso:
$$\delta(X' \cup \{b\}) \leq \delta(X').$$
Como $X' \cup \{b\} \supseteq \{b,a\}$ y por definición la dimensión es el mínimo, tenemos que:
$$\partial(\{b,a\}) \leq \delta(X' \cup \{b\}) \leq \delta(X') = \partial(\{a\})$$

Por lo que concluimos que $\partial(\{b,a\}) = \partial(\{a\})$, es decir, $b \in Ecl(X)$.

□

Proposición 5.1.2. *Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, $X \subseteq A$ y $y \in X$ entonces*

1. $1 \in Ecl(X)$.
2. *Si* $a \in Ecl(X)$ *entonces* $1 + a \in Ecl(X)$.

Demostración. 1. Dado que Ecl es monótona es suficiente demostrar que $1 \in Ecl(\{y\})$ o equivalentemente que $\partial(\{y,1\}) = \partial(\{y\})$. Por el lema 2.3.2 (1) se tiene que $\partial(\{y,1\}) \geq \partial(\{y\})$ por lo que sólo queda demostrar la otra desigualdad.

De manera análoga a como se hizo en la proposición anterior, sea $X' \subseteq D$ tal que $y \in X'$ y tal que $\partial(\{y\}) = \delta(X')$. Debido a que 1 es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ se tiene al igual que en el caso anterior que:

$$tr(X' \cup E(X') \cup \{E(1), 1\}) = \begin{cases} tr(X' \cup E(X')) & \text{o} \\ tr(X' \cup E(X')) + 1 \end{cases}$$

y que:

$$lin(X' \cup \{1\}) = \begin{cases} lin(X') & \text{o} \\ lin(X') + 1 \end{cases}$$

Si sucede el caso uno respecto a la trascendencia el razonamineto es análogo al anterior. Ahora bien, si sucede el caso dos entonces afirmamos que $lin(X' \cup \{1\}) = lin(X') + 1$.

Supongamos no fuera así, es decir, supongamos que 1 es combinación lineal de los x_i, por ende

$$1 = \Sigma_{i=1}^{n}(n_i/m_i)x_i$$

con $n_i \in \mathbb{Z}$ y $m_i \in \mathbb{N}$. Mulplicando por $M := \Pi_{i=1}^{n} m_i$ y definiendo $Mn_i := n'_i$ se tiene que:

$$M = \Sigma_{i=1}^{n} n'_i x_i.$$

Luego aplicando la exponencial a dicha expresión se tiene que:

$$(E(1))^M = \Pi_{i=1}^{n} E(x_i)^{n'_i}.$$

Multplicando por todos aquellos n'_i negativos y restando nos queda que

$$\Pi_{n'_i \geq 0} E(x_i)^{n'_i} - (\Pi_{n'_i < 0} E(x_i)^{-n'_i})(E(1))^M = 0.$$

Lo cual implica que $E(1)$ es algebraicamente dependiente de $X' \cup E(X')$, lo cual contradice el hecho de que $tr(X' \cup E(X') \cup \{E(1), 1\}) = tr(X' \cup E(X')) + 1$.

De ahí que, $lin(X' \cup \{1\}) = lin(X') + 1$; por lo tanto, realizando un razonamiento análogo al de la proposición anterior se tiene que $\partial(\{y,1\}) \leq \partial(\{y\})$.

2. La prueba es análoga a la anterior, utilizando el hecho de que a y $a+1$ son algebraicamente dependientes.

□

Proposición 5.1.3. *Sean* $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ *y* $X \subseteq A$ *entonces* $Ecl_{\mathfrak{A}}(X) \in \mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$ *y* $Ecl_{\mathfrak{A}}(X) \precsim \mathfrak{A}$.[4]

Demostración. Como estructura $Ecl_{\mathfrak{A}}(X) = \mathfrak{A} \restriction_{Ecl_{\mathfrak{A}}(X)}$. Lo primero que demostraremos es que $Ecl_{\mathfrak{A}}(X)$ es un campo algebraicamente cerrado. Sea $\{a_0, ..., a_n\} \subseteq Ecl_{\mathfrak{A}}(X)$ y $p(x) = \Sigma_{i=0}^{n} a_i x^i$. Como $\mathfrak{A}$ es algebraicamente cerrado, existe un $b \in A$ tal que $p(b) = 0$. Afirmamos que $b \in Ecl_{\mathfrak{A}}(\{a_i\}_{i \in \{0,...,n\}})$ o equivalentment que

$$\partial(\{a_i\}_{i \in \{0,...,n\}}) = \partial(\{a_i\}_{i \in \{0,...,n\}} \cup \{b\}).$$

Utilizando que b es algebraicamente dependiente de $\{a_i\}_{i \in \{0,1,...,n\}}$ se puede realizar un razonamiento análogo al de la proposición anterior para concluir la igualdad.

Por lo tanto, $b \in Ecl(\{a_i\}_{i \in \{0,...,n\}}) \subseteq Ecl(X)$. Por lo que hemos demostrado que $Ecl(X)$ es cerrado bajo soluciones de polinomios. Utilizando ello y la proposición anterior veamos que es cerrado bajo inversos (aditivo y multiplicativo), bajo productos, bajo sumas y bajo restas:

- *Inverso aditivo:* Dado $a \in Ecl(X)$, considere $p(x) = x + a$.
- *Inverso multiplicativo:* Dado $0 \neq a \in Ecl(X)$, como $1 \in Ecl(X)$, por la proposición anterior, entonces por el inciso anterior $-1 \in Ecl(X)$; por lo que considere $p(x) = ax - 1$.
- *Cerrado bajo producto:* Dados $a, b \in Ecl(X)$, por los dos incisos anteriores se tiene que $a^{-1}, -b \in Ecl(X)$ por lo que considere $p(x) = a^{-1}x - b$.
- *Cerrado bajo sumas:* Dados $a, b \in Ecl(X)$, por los dos inicisos anteriores $a^{-1}b \in Ecl(X)$, luego por el inciso dos de la proposición anterior $1 + a^{-1}b \in Ecl(X)$ y de nuevo por el inciso anterior concluimos que $a(1 + a^{-1}b) \in Ecl(X)$; como $a(1 + a^{-1}b) = a + b$, concluimos que $a + b \in Ecl(X)$.
- *Cerrado bajo restas:* Dados $a, b \in Ecl(X)$, por el inciso uno $-b \in Ecl(X)$ y al ser $Ecl(X)$ cerrado bajo sumas, por el inciso anterior, concluimos que $a - b \in Ecl(X)$.

De donde se sigue que $Ecl(X)$ es un campo algebraicamente cerrado, es decir, $Ecl(X)$ satisface el axioma I.

Para ver que satisface el axioma II, note primero que $1 \in Ecl(X)$ por la proposición anterior y por la proposición 5.1.1

$$\{x \in A | E(x) = 1\} \subseteq dom(E_{Ecl(X)}).$$

Como $Ker(E)$ es estándar, el $Ker(E_{Ecl(X)})$ es estándar. También dado que E es suprayectiva en A se tiene que $E_{Ecl(X)}$ es suprayectiva en en $Ecl(X)^*$.

Ahora bien, veamos que es cerrada bajo la exponencial. Sea $a \in Ecl(X)$, afirmamos que $\partial(\{a\}) = \partial(\{a, E(a)\})$.

La prueba es análoga a la prueba de la proposición 5.1.1. Lo único que hay que notar es que dado $\delta(X') = \partial(\{a\})$, como en la prueba anterior, si

$$tr(X' \cup E(X') \cup \{E(a), E(E(a))\}) = tr(X' \cup E(X')) + 1$$

entonces $lin(X' \cup \{E(a)\}) = lin(X') + 1$, ya que si $lin(X' \cup \{E(a)\}) = lin(X')$ entonces $E(E(a))$ sería algebraico en $X' \cup E(X')$. De ahí que $Ecl(X)$ satisface el axioma II.

[4] La definición de este úlimo hecho es la definición 2.2.1.

Es claro que $Ecl(X)$ satisface la propiedad de Schanuel y CN porque todo subconjunto de nuestro nuevo universo es subconjunto de A. Por ende, queda probado que $Ecl(X) \in \mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$ y además note que $Ecl(X)$ es infinito.

Veamos que $Ecl(X)$ es subestructura fuerte de $\mathfrak{A}$. Como $Ecl_{\mathfrak{A}}(X)$ es la restricción de $\mathfrak{A}$ a nuestro universo y es cerrada bajo funciones, es claro que $Ecl_{\mathfrak{A}}(X)$ es subestrucura de $\mathfrak{A}$ en L.

Para la segunda condición, sea $Y \subseteq_{fin} D_{\mathfrak{A}}$ y lo que debemos demostrar es que $\delta(Y/Ecl(X)) \geq 0$. Como $Ecl(X)$ es infinito, sea $Z \subseteq_{fin} Ecl(X)$. Por el lema 2.3.1, hay un $Z' \supseteq Z$ finito tal que

$$\delta(Z') = \partial(Z) \text{ y } \delta(Y/Z') \geq 0.$$

Además note que $Z' \subseteq Ecl(X)$, ya que dado $a \in Z'$ se tiene que $\partial(Z \cup \{a\}) \leq \delta(Z')$, al ser la dimensión el mínimo, y $\delta(Z') = \partial(Z)$. De donde se concluye que $Z' \subseteq Ecl(Z)$, dado que Ecl es monótona concluimos que $Z' \subseteq Ecl(X)$.

Por lo tanto, por definición de predimensión relativa $\delta(Y/Ecl(X)) \geq 0$.

Como se satisfacen las dos condiciones de ser subestructura fuerte, concluimos que $Ecl_{\mathfrak{A}}(X) \precsim \mathfrak{A}$.

□

Antes de pasar a probar que $Ecl_{\mathfrak{A}}(X) \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, es preciso demostrar un par de proposiciones de geometría algebraica.

Proposición 5.1.4. *Sean $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$, $\mathfrak{A} \precsim \mathfrak{B}$, y $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ una variedad algebraica libre, irreducible, de dimensión n y rotunda definida sobre $< C >_{\mathfrak{A}} \subseteq A$ entonces $V' = \mathbb{V}_{\mathfrak{B}}(\mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(V)) \subseteq B^n \times (B^*)^n$ es libre, irreducible, de dimensión n y rotunda definida sobre $< C >_{\mathfrak{A}}$.*

Demostración. Claramente se encuentra definda sobre $< C >_{\mathfrak{A}}$. Demostremos que cada una de las propiedades se mantiene:

- **Libre:** Procedamos por contradicción. Supongamos que V' no es libre de dependencia aditiva sobre $\mathfrak{B}$, entonces hay $\Sigma_{i=1}^n m_i x_i - b \in \mathbb{I}_{\mathfrak{B}}(V')$ tal que $b \in D_{\mathfrak{B}} \backslash D_{\mathfrak{A}}$, tiene que encontrarse ahí pues si estuviera en $D_{\mathfrak{A}}$ tendríamos una contradicción con la libertad sobre $\mathfrak{A}$. Ahora bien, ya que $V \subseteq \mathbb{V}_{\mathfrak{B}}(\mathbb{I}_{\mathfrak{A}}(V))$ y que $V \neq \emptyset$, hay un $(\bar{v}, E(\bar{v})) \in V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ tal que $\Sigma_{i=1}^n m_i v_i = b$; como $\mathfrak{A}$ es un campo tal que $D_{\mathfrak{A}} = A$, ello implica que $b \in D_{\mathfrak{A}}$, lo cual es una contradicción con la libertad sobre $\mathfrak{A}$. El caso de dependencia multiplicativa es análoga.

- **Irreducible:** La prueba se sigue del hecho de que por el apéndice B los campos algebraicamente cerrados eliminan cuantificadores, de que ser irreducible es definible en $L_{\omega,\omega}$ por [14] y que por el Teorema de las Bases de Hilbert $\mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(V)$ está generado por un número finito de polinomios.

- **Dimensión n:** La prueba es análoga a la de ser irreducible, sólo que ahora lo que utilizamos es que la dimensión es definible en $L_{\omega,\omega}$, ello lo sabemos por el apéndice B.

- **Rotunda:** Como la dimensión no cambia, se sigue que $V' \subseteq B^n \times (B^*)^n$ es rotunda.

□

Proposición 5.1.5. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ y $V \subseteq A^n \times (A^*)^n$ como en la proposición anterior. Si $(\bar{a}, E(\bar{a})) \in B^n \times (B^*)^n$ es genérico en $\mathbb{V}_{\mathfrak{B}}(\mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(V))$ sobre $< C >_{\mathfrak{A}}$ entonces es genérico en V sobre $< C >_{\mathfrak{A}}$.*

Demostración. Lo que afirma la proposición es que

$$\mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(\mathbb{V}_{\mathfrak{B}}(\mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(V))) = \mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(V),$$

por lo que demostraremos esta última afirmación.

$\boxed{\subseteq}$ Al ser V definida sobre $< C >_{\mathfrak{A}}$, se tiene que $V = \mathbb{V}_{\mathfrak{A}}(\mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(V))$, como $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ se tiene que

$$V \subseteq \mathbb{V}_{\mathfrak{B}}(\mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(V)).$$

Por lo tanto, por el lema 1.3.1 concluimos que:

$$\mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(\mathbb{V}_{\mathfrak{B}}(\mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(V))) \subseteq \mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(V).$$

$\boxed{\supseteq}$ Sean $p \in \mathbb{I}(V)$ y $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{V}_{\mathfrak{B}}(\mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(V))$, entonces por la definición de $\mathbb{V}_{\mathfrak{B}}$ se tiene que $p(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Por ende, $p \in \mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(\mathbb{V}_{\mathfrak{B}}(\mathbb{I}_{<C>_{\mathfrak{A}}}(V)))$.

□

Definición 5.1.1. Dados $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ y $X, Y \subseteq A$, diremos que X es **fuerte en Y relativo a $\mathfrak{A}$** si para todo $X_0 \subseteq_{fin} X$ se cumple que $\delta_{\mathfrak{A}}(X_0/Y) \geq 0$ y lo denotaremos por $X \precsim_{\mathfrak{A}} Y$.

Note que en el caso que $Y = A$ la definición es análoga la de subestructura fuerte, sólo que ahora no pedimos que X sea estructura sino únicamente un subconjunto. Además es claro que toda subestructura fuerte es fuerte en A relativo a $\mathfrak{A}$.

Lema 5.1.3. *Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ y $X \subseteq A$ entonces $Ecl_{\mathfrak{A}}(X) \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$.*

Demostración. Por la proposición 5.1.3 sabemos que $Ecl_{\mathfrak{A}}(X) \in \mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$, por lo tanto únicamente queda ver que $Ecl(X)$ satisface el axioma V de los campos pseudo-exponenciales. Sea $V \subseteq Ecl(X)^n \times (Ecl(X)^*)^n$ una variedad irreducible, libre y rotunda definida sobre $Ecl(X)$ tal que $dim(V) = n$ y $C \subseteq_{fin} Ecl(X)$.

Primero note que podemos suponer que $C \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$. Pues en caso que no lo sea, por el lema 2.3.2(2) hay $C' \subseteq_{fin} Ecl(X)$ tal que $\delta_{Ecl(X)}(C' \cup C) = \partial_{Ecl(X)}(C)$, como $Ecl(X) \precsim \mathfrak{A}$ por el lema 2.3.3 se satiface que $\delta_{\mathfrak{A}}(C \cup C') = \partial_{\mathfrak{A}}(C)$ y por el lema 2.3.2(1) concluimos que $C \cup C' \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$. Por lo que podríamos tomar a $C' \cup C$ en vez de C y tomar los puntos genéricos respecto a dicho campo.

En segundo lugar, como $\mathfrak{A}$ satisface el axioma V, por las dos proposiciones anteriores hay un $(\bar{a}, E(\bar{a}))$ genérico en V sobre $< C >_{\mathfrak{A}}$, por lo que solo queda demostrar que $a_i \in Ecl(X)$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, pero antes de hacer ello, hay ciertas propiedades que debemos destacar.

Como V es libre sobre $Ecl(X)$, se tiene que V es libre sobre $< C >_{Ecl(X)}$, por lo que $\bar{a}$ es linealmente independiente y más aún:

$$lin(\bar{a}/C) = n,$$

ya que dada C_0 base de C, se tiene que $lin(\bar{a} \cup C) = n + |C_0|$ pues $\bar{a} \cup C_0$ es un conjunto independiente.

Además, como $(\bar{a}, E(\bar{a}))$ es genérico, $Loc_{C \cup E(C)}(\bar{a}, E(\bar{a})) = V$ y por la proposición 1.3.4 sabemos que $dim(Loc_{C \cup E(C)}(\bar{a}, E(\bar{a}))) = tr(\bar{a}, E(\bar{a})/C \cup E(C))$, por ende:

$$tr(\bar{a}, E(\bar{a})/C \cup E(C)) = dim(V) = n.$$

En consencuencia, de las dos igualdades llegamos a que:

$$\delta(\bar{a}/C) = tr(\bar{a}, E(\bar{a})/C \cup E(C)) - lin(\bar{a}/C) = 0$$

o equivalentemente que:
$$\delta(\{\bar{a}\} \cup C) = \delta(C).$$

Con base en ello, demostremos que $a_i \in Ecl(C)$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, es decir, que $\partial(C \cup \{a_i\}) \leq \partial(C)$. Sea $C \subseteq Y \subseteq_{fin} A$ tal que $\delta(C \cup Y) = \partial(C)$.

Por ende, como $C \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$ tenemos que $\delta(Y/C) \geq 0$, de donde por la última igualdad del razonamiento previo se tiene que:
$$\delta(Y \cup C) \geq \delta(C) = \delta(C \cup \{\bar{a}\}).$$
Como $C \cup \{a_i\} \subseteq C \cup \{\bar{a}\}$ y como la dimensión por definición es el mínimo,
$$\delta(C \cup \{\bar{a}\}) \geq \partial(C \cup \{a_i\}),$$
por lo que concluimos que:
$$\partial(C) \geq \partial(C \cup \{a_i\}).$$

Por lo tanto, $a_i \in Ecl(C) \subseteq Ecl(X)$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. De donde concluimos por la proposición 5.1.3 que $(\bar{a}, E(\bar{a})) \in Ecl(X)^n \times (Ecl(X)^*)^n$ y que $Ecl(X) \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$. □

Por último, veamos que los campos pseudo-exponenciales satisfaen 1.d), para ello será necesario primero demostrar un último lema.

Lema 5.1.4. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ y $X, X' \subseteq_{fin} A$ tales que $tp^{L^*}_{qf_{\mathfrak{A}}}(X) = tp^{L^*}_{qf_{\mathfrak{B}}}(X')$ entonces si $\partial(X) \leq n$ entonces $\partial(X') \leq n$.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que X es linealmente independiente de tamaño m, es decir, $lin(X) = m$. Note que por el lema 2.3.1 hay Y linealmente independiente de tamaño p tal que $\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle = \{0\}$, $\delta(X \cup Y) = \partial(X)$ y $Y \subseteq Ecl(X)$. De donde tenemos:
$$\partial(X) = \delta(X \cup Y) = tr(X \cup Y \cup E(X) \cup E(Y)) - lin(X \cup Y) \leq n$$
Lo que implica que:
$$tr(X \cup Y \cup E(X) \cup E(Y)) \leq n + m + p.$$
Considere $Loc_{\mathbb{Q}}(X \cup Y \cup E(X) \cup E(Y))$, sabemos que es irreducible y que $dim(Loc_{\mathbb{Q}}(X \cup Y \cup E(X) \cup E(Y))) = tr(X \cup Y \cup E(X) \cup E(Y))$; además $Y \cup E(Y)$ es genérico en $Loc_{\mathbb{Q}}(X \cup Y \cup E(X) \cup E(Y))_X$ y libre sobre $< X \cup E(X) >_{\mathfrak{A}}$ al ser $\langle Y \rangle \cap \langle X \rangle = \{0\}$. De donde:
$$\mathfrak{A} \models R_{Loc_{\mathbb{Q}}(X \cup Y \cup E(X) \cup E(Y))}[X].$$
Ahora bien, como X' tiene el mismo tipo libre de cuantificadores que X:
$$\mathfrak{B} \models R_{Loc_{\mathbb{Q}}(X \cup Y \cup E(X) \cup E(Y))}[X'].$$
Por ende, hay un $Y' \subseteq Ecl(X')$ tal que $Y' \cup E(Y')$ es genérico en $Loc_{\mathbb{Q}}(X \cup Y \cup E(X) \cup E(Y))_{X'}$ sobre $X' \cup E(X')$. Afirmamos que $Loc_{\mathbb{Q}}(X', Y', E(X'), E(Y')) \subseteq Loc_{\mathbb{Q}}(X, Y, E(X), E(Y))$.

Sean $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) \in Loc_{\mathbb{Q}}(X', Y', E(X'), E(Y')$ y $f(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4) \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(X, Y, E(X), E(Y)) = 0$, entonces para todo $(\bar{w}_1, \bar{w}_2) \in Loc(X, Y, E(X), E(Y))_{X'}$ se tiene que $f(X', \bar{w}_1, E(X'), \bar{w}_2) = 0$. Por ende, como $Y' \cup E(Y')$ es genérico en $Loc_{\mathbb{Q}}(X, Y, E(X), E(Y))_{X'}$ sobre $X' \cup E(X')$ se tiene que $f(X', Y', E(X'), E(Y') = 0$. Por lo que por definición del locus se tiene que $f(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) = 0$, es decir, $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) \in Loc_{\mathbb{Q}}(X, Y, E(X), E(Y))$.

De donde se tiene que $dim(Loc_{\mathbb{Q}}(X', Y', E(X'), E(Y')) \leq dim(Loc_{\mathbb{Q}}(X, Y, E(X), E(Y))$ y por lo que:

$$tr(X' \cup Y' \cup E(X' \cup Y')) = dim(Loc_{\mathbb{Q}}(X', Y', E(X'), E(Y'))) \leq$$
$$dim(Loc_{\mathbb{Q}}(X \cup Y \cup E(X) \cup E(Y)) \leq n + p + l.$$

Como $Y' \cup E(Y')$ es genérico en una variedad libre sobre $< X' \cup E(X') >_{\mathfrak{B}}$ y X' es linealmente independiente, ya que X lo es, se tiene que Y' es linealmente independiente y que $\langle Y' \rangle \cap \langle X' \rangle = \{0\}$, por lo que $lin(Y' \cup X') = l + p$. De ahí que:

$$\delta(X' \cup Y') \leq n.$$

Por último, como por definición la dimensión es el mínimo concluimos que:

$$\partial(X') \leq n.$$

$\square$

Lema 5.1.5. *Si f es un L^*-monomorfismo parcial de $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ a $\mathfrak{B} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, donde f va de $\{X\} \cup \{y\} \subseteq A$ en $\{f(X)\} \cup \{f(y)\} \subseteq B$, entonces tenemos que $y \in Ecl_{\mathfrak{A}}(X)$ si y sólo si $f(y) \in Ecl_{\mathfrak{B}}(f(X))$.*

Demostración. $\boxed{\rightarrow}$ Supongamos que $y \in Ecl_{\mathfrak{A}}(X)$ entonces por el principio de finitud hay un $X_0 \subseteq_{fin} X$ tal que $\partial(X_0 \cup \{y\}) = \partial(X_0)$, en particular $\partial(X_0 \cup \{y\}) \leq \partial(X_0)$

Ahora bien, como f es un L^*-monomorfismo $tp^{L^*}_{qf_{\mathfrak{A}}}(X_0 \cup \{y\}) = tp^{L^*}_{qf_{\mathfrak{B}}}(f(X_0) \cup \{f(y)\})$, de donde por la proposición anterior concluimos que

$$\partial(f(X_0) \cup \{f(y)\}) \leq \partial(X_0).$$

Luego dado que $\partial(f(X_0)) \leq \partial(f(X_0))$ y utlizando de nuevo la proposición anterior pero en el sentido contrario concluimos que:

$$\partial(X_0) \leq \partial(f(X_0)).$$

De las dos desigualdades concluimos que:

$$\partial(f(X_0) \cup \{f(y)\}) \leq \partial(f(X_0)).$$

Por lo que $f(y) \in Ecl_{\mathfrak{B}}(f(X_0)) \subseteq Ecl_{\mathfrak{B}}(f(X))$.

$\boxed{\leftarrow}$ Se realiza de manera análoga. $\square$

Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ satisface la condición 1. de ser clase cuasiminimal excelente. La condición 2. y 3. serán estudiadas en la siguiente sección.

5.2. $\aleph_0$-homegeneidad y excelencia

Antes de pasar a la prueba de que la clase de campos pseudo-exponenciales cumple con la segunda condición de clase cuasiminimal excelente es necesario probar algunas proposiciones y algunos lemas.

Proposición 5.2.1. *Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ y $X \subseteq_{fin} A$ es independiente respecto a Ecl entonces $X \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$.*

Demostración. La prueba la realizaremos por inducción sobre n.

Si $n = 0$ entonces $X = \emptyset$ y $\emptyset \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$, pues $\mathfrak{A}$ satisface la propiedad de Schanuel.

Supongámoslo para n y demostrémoslo para $n+1$. Sea $X \subseteq_{fin} A$ independiente tal que $X = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$ y $Y \subseteq D$. Considere $X_0 = X \backslash \{x_{n+1}\}$ y note que por hipótesis de inducción $X_0 \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$.

Por el lema 2.3.1 hay $X' \subseteq_{fin} D$ tal que $\partial(X_0) = \delta(X' \cup X_0)$ y $X' \cap X_0 = \emptyset$; como $X_0 \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$ se tiene que

$$\delta(X'/X_0) \geq 0.$$

De donde

$$\delta(Y/X) \geq \delta(Y/X) - \delta(X'/X_0).$$

Lo cual por la definición de $\delta(./.)$ es igual a:

$$(\delta(Y \cup X_0 \cup \{x_{n+1}\}) - \delta(X' \cup X_0)) - (\delta(X_0 \cup \{x_{n+1}\}) - \delta(X_0)).$$

Ahora bien, como $\partial(X_0 \cup \{x_{n+1}\}) > \partial(X_0) = \delta(X' \cup X_0)$, ya que $x_{n+1} \notin Ecl(X_0)$, y debido a que $X_0 \cup \{x_{n+1}\} \subseteq X_0 \cup \{x_{n+1}\} \cup Y$ se tiene que

$$\delta(X_0 \cup \{x_{n+1}\} \cup Y) - \delta(X' \cup X_0) > 0$$

o equivalentemente que

$$\delta(X_0 \cup \{x_{n+1}\} \cup Y) - \delta(X' \cup X_0) \geq 1.$$

Por lo que se tiene que:

$$(\delta(Y \cup X_0 \cup \{x_{n+1}\}) - \delta(X' \cup X_0)) - (\delta(X_0 \cup \{x_{n+1}\}) - \delta(X_0)) \geq 1 - (\delta(X_0 \cup \{x_{n+1}\}) - \delta(X_0)).$$

También note que como $X_0 \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$, por los corolarios 2.1.1 y 2.1.2 y la propiedad de Schanuel se tiene que:

$$0 \leq \delta(\{x_{n+1}\}/X_0) = \delta(X_0 \cup \{x_{n+1}\}) - \delta(X_0) \leq \delta(x_{n+1}) \leq 1.$$

De donde:

$$1 - (\delta(X_0 \cup \{x_{n+1}\}) - \delta(X_0)) \geq 0.$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\delta(Y/X) \geq 0,$$

y como Y era un subconjunto arbitrario se tiene que:

$$X \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}.$$

$\square$

Corolario 5.2.1. *Si* $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, $G \subseteq A$ *cerrado y* $a \in A$ *independiente de* G *entonces* $G \cup \{a\} \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$.

Demostración. Primero note que como G es cerrado se tiene que $Ecl(G) = G$ y por la proposición 5.1.2 $G \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$.

Sean $Y \subseteq_{fin} D$ y $Z \subseteq_{fin} G \cup \{a\}$. Si $a \notin Z$ por el hecho de que $G \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$ no hay nada que hacer por lo que supongamos que $Z = Z_0 \cup \{a\}$.

Por el lema 2.3.1 hay $Z' \subseteq D$ tal que $\partial(Z_0) = \delta(Z_0 \cup Z')$, más aún $Z' \subseteq Ecl(G) = G$ y $Z_0 \cup Z' \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$. Por otro lado, como $a \notin Ecl(G)$ se tiene que $a \notin Ecl(Z_0 \cup Z')$ por lo que realizando un argumento análogo al del paso inductivo anterior, donde el papel de X_0 es jugado por $Z_0 \cup Z'$, concluimos que $\delta(Y/Z_0 \cup Z' \cup \{a\}) \geq 0$.

Por lo tanto, se tiene que $G \cup \{a\} \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$.

□

Proposición 5.2.2. *Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn*}_{est,sch}$. Si $x \notin Ecl(\emptyset)$ entonces $\{x\} \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$.*

Demostración. Como $x \notin Ecl(\emptyset)$, se tiene que $\partial(\{x\}) > 0$ y debido a que $\delta(\{x\}) \leq 1$, concluimos que $\partial(\{x\}) = 1$. De ahí que $\partial(\{x\}) = \delta(\{x\})$. De dicha afirmación se sigue trivialmente que para todo $Y \subseteq_{fin} A$ se cumple que:

$$\delta(Y/\{x\}) \geq 0.$$

Por lo tanto, $\{x\} \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$. □

Una última proposición que se encuentra íntimamente ligada a las anteriores es la siguiente.

Proposición 5.2.3. *Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, $Ker(E_{\mathfrak{A}}) = \tau\mathbb{Z}$ y $X \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$ tal que $X \subseteq_{fin} A$ entonces $X \cup \{\tau\} \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$.*

Demostración. Sea $Y \subseteq_{fin} A$, demostremos que $\delta(Y/\{\tau\} \cup X) \geq 0$. Por el lema 2.3.1 se tiene que

$$\delta(Y/\{\tau\} \cup X) = \delta(Y \cup \{\tau\}/X) - \delta(\tau/X).$$

Como $X \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$, se tiene que $\delta(Y \cup \{\tau\}/X) \geq 0$. Más aún, afirmamos que $\delta(\tau/X) = 0$.

La prueba de dicha igualdad la haremos por casos:

1. **Caso 1:** Si $\tau \in \langle X \rangle$ entonces $lin(\tau/X) = 0$. Además se tiene que τ es algebraicamente independiente sobre $X \cup E(X)$ y como $E(\tau) = 1$ se tiene que $tr(\tau, E(\tau)/X \cup E(X)) = 0$. Por ende, $\delta(\tau/X) = 0$.

2. **Caso 2:** Si $\tau \notin \langle X \rangle$ entonces $lin(\tau/X) = 1$. Además como $X \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$ se tiene que $\delta(\tau/X) \geq 0$, lo cual implica que
$$tr(\tau, E(\tau)/X \cup E(X)) \geq 1$$
pero dado que $E(\tau) = 1$, nos queda que $tr(\tau, E(\tau)/X \cup E(X)) = 1$. Por ende, $\delta(\tau/X) = 0$.

Por lo tanto, en cualquiera de los casos se tiene que $\delta(\tau/X) = 0$, de donde concluimos que

$$\delta(Y/\{\tau\} \cup X) = \delta(Y \cup \{\tau\}/X) \geq 0.$$

□

Proposición 5.2.4. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, $X \subseteq A$ y $a \in A$ tal que $a \notin Ecl_{\mathfrak{A}}(X)$. Sean $Y \subseteq A'$ y $b \in A'$ tal que $b \notin Ecl_{\mathfrak{A}'}(Y)$. Si $g : X \to Y$ es un $L-$monomorfismo parcial entonces $f = g \cup \{(a,b)\}$ es un $L-$monomorfismo parcial.*

Demostración. Demostraremos que para toda ϕ libre de cuantificadores y $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ se tiene que:

$$\mathfrak{A} \vDash \phi[a, x_1, ..., x_n] \text{ sii } \mathfrak{A} \vDash \phi[b, g(x_1), ..., g(x_n)].$$

Consideraremos únicamente los casos cuando ocurre a, pues en caso de que no suceda, la afirmación anterior se sigue del hecho de que g es monomorfismo parcial.

La prueba la haremos por inducción sobre n y por inducción sobre la formación de fórmulas. Primero es pertinente observar que toda fórmula atómica en n variables es equivalente a $(f(v_1, ..., v_n) = 0)$ con $f \in \mathbb{Q}[\bar{x}]$ o $E(\Sigma_{i=1}^n q_i v_i + q_{c_1} c_1, \Sigma_{i=1}^n q_i' v_i + q_{c_1} c_1)$ donde $q_i \in \mathbb{Q}$ o $V(\Sigma_{i=1}^n q_i^1 v_i + q_{c_1}^1 c_1 + q_{c_0}^1 c_0, ..., \Sigma_{i=1}^n q_i^n v_i + q_{c_1}^n c_1 + q_{c_0}^n c_0)$ donde $q_i \in \mathbb{Q}$.

Sea $n = 0$ y ϕ una fórmula atómica.

$\boxed{\rightarrow}$ Supongamos que $\mathfrak{A} \vDash \phi[a]$.

La prueba de que $\mathfrak{A}' \vDash \phi[b]$ la haremos por casos

- **Caso 1:** Sea $\phi := (f(v_1) = 0)$ donde $f \in \mathbb{Q}[x]$. Note que f debe ser el polinomio cero ya que si no lo fuera, como $\mathbb{Q} \subseteq Ecl(X)$ y $Ecl(X)$ es un campo algebraicamente cerrado por la proposición 5.1.3 se tiene que $a \in Ecl(X)$, lo cual contradice la hipótesis. Por ende, f debe ser el polinomio cero, de donde se tiene que $\mathfrak{A}' \vDash \phi[b]$.[5]

- **Caso 2:** Si $\phi := (E(v_1, v_1))$ note que $\mathfrak{A} \nvDash \phi[a]$ y $\mathfrak{A} \nvDash \phi[a]$, ya que $\partial(a, 1) > \partial(1)$ pues $a \notin Ecl(X)$.

  Si $\phi := (E(c_0, v_1))$, note que $\mathfrak{A} \nvDash \phi[0, a]$ pues $E(0) = 1$.

  Si $\phi := (E(c_1, v_1))$ o $\phi := (E(v_1, c_1))$, note que $\mathfrak{A} \nvDash \phi[1, a]$ y $\mathfrak{A} \nvDash \phi[a, 1]$, en el primero de los casos ya que $E(1) \in Ecl(X)$ para todo X y en el segundo pues $Ker(E) \subseteq Ecl(X)$ para toda X.

  El análisis en el resto de las combinaciones es análogo, por lo que el caso es vacío.

- **Caso 3:** Si $\phi := (V(v_1))$, note que $\mathfrak{A} \nvDash V[a]$, ya que por la proposición 5.1.3 $Ecl(X)$ es un campo algebraicamente cerrado.

  El análisis del resto de las combinaciones es análogo debido a que $0, 1 \in \mathbb{Q}$.

Debido a que ellos son todos los casos tenemos la ida.

$\boxed{\leftarrow}$ La vuelta es análoga.

El paso inductivo sobre las fórmulas libres de cuantificadores se sigue directo de la hipótesis de inducción, por lo que tenemos probado el caso $n = 0$.

Para hacer la exposición lo más limpia posible y debido a que el paso $n + 1$ es análogo al paso $n = 1$, haremos este último.

Sean $n = 1$, $x_1 \in X$ y ϕ una fórmula atómica.

$\boxed{\rightarrow}$Supongamos que $\mathfrak{A} \vDash \phi[a, x_1]$. La prueba de que $\mathfrak{A}'$ lo satisface la haremos por casos de igual manera a como se realizó con en el caso $n = 0$:

- **Caso 1:** Sea $\phi := (f(v_1, v_2) = 0)$ donde $f \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$. Note que $f(v_1, x_1)$ debe ser el polinomio cero, ya que si no lo fuera como $\mathbb{Q} \cup \{x_1\} \subseteq Ecl(X)$ y $Ecl(X)$ es campo algebraicamente cerrado por la proposición 5.1.3 se tiene que $a \in Ecl(X)$, lo cual contradice la hipótesis. Por ende, $\mathfrak{A} \vDash \forall v_1(f(v_1, x_1) = 0)$. Luego reestringiendo a $\mathfrak{A}$ al lenguaje de campos, utlizando el

[5] Puede parecer extraño al lector considerar el polinomio cero pero el polinomio cero ocurre en la fórmulas atómicas, por ejemplo con $\phi := (a = a)$.

hecho de que los campo algebraicamente cerrados eliminan cuantificadores[6] y como g es un $L-$monomorfismo parcial, se tiene que $\mathfrak{A}' \vDash \forall v_1(f(v_1, g(x_1)) = 0)$. De donde se sigue que $\mathfrak{A}' \vDash \phi[b, g(x_1)]$.

- **Caso 2:** Si $\phi := (E(v_1, v_2))$, note que $\mathfrak{A} \nvDash \phi[a, x_1]$ y $\mathfrak{A} \nvDash \phi[x_1, a]$, ya que por la proposición 5.1.3 $Ecl(X)$ es cerrado bajo imágenes y preimágenes de la exponencial, por lo que el caso es vacío. El estudio del resto de los casos es análogo a los casos de cuando $n = 0$.

- **Caso 3:** Si $\phi := (V(v_1, v_2))$ note que $\mathfrak{A} \nvDash V[a, x_1]$ y $\mathfrak{A} \nvDash V[x_1, a]$, ya que por la proposición 5.1.3 $Ecl(X)$ es un campo algebraicamente cerrado. El estudio del resto de los casos es análogo a los casos de cuando $n = 0$.

$\boxed{\leftarrow}$ La vuelta es análoga.

El paso inductivo se sigue directamente de la hipótesis de inducción, por lo que hemos demostrado el caso $n = 1$.

La prueba para $n + 1$ es análoga a la prueba anterior.

Por lo tanto, $f = g \cup \{(a, b)\}$ es un $L-$monomorfismo parcial.

$\square$

Es pertinente notar que si $a \notin Ecl(X)$ entonces $tp^L_{qf_{\mathfrak{A}}}(a/X)$ realmente no nos dice nada, ya que a únicamente satisface las fórmulas *triviales*, a dicho tipo se le conoce como el tipo genérico.

Proposición 5.2.5. *Sean* $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, $X \subseteq A$ *y* $Y \subseteq A'$. *Si* $g : X \to Y$ *es un* $L-$*monomorfismo parcial entonces existe un* f $L-$*isomorfismo de* $< X >_{\mathfrak{A}}$ *a* $< Y >_{\mathfrak{A}'}$ *tal que* $\forall x \in X(f(x) = g(x))$.

Demostración. Recuerde que $< X >_{\mathfrak{A}}$ es el campo exponencial tal que:

- $D_{<X>_{\mathfrak{A}}} = \langle X \rangle$ y $E_{<X>_{\mathfrak{A}}} = E_{\mathfrak{A}} \upharpoonright_{D_{<X>_{\mathfrak{A}}}}$.
- Cuyo campo subyacente es $\mathbb{Q}(D_{<X>_{\mathfrak{A}}} \cup E_{<X>_{\mathfrak{A}}}(D_{<X>_{\mathfrak{A}}}))$.

Lo que haremos será definir primero un $L-$monomorfismo parcial g_0 tal que $f \subseteq g_0$ y $g_0 : D_{<X>_{\mathfrak{A}}} \cup E_{<X>_{\mathfrak{A}}}(D_{<X>_{\mathfrak{A}}}) \to D_{<Y>_{\mathfrak{B}}} \cup E_{<Y>_{\mathfrak{B}}}(D_{<Y>_{\mathfrak{B}}})$ de la siguiente manera.

1. **Caso 1:** Si $a \in D_{<X>_{\mathfrak{A}}}$, se tiene que $a = \Sigma^n_{i=1} q_i x_i$ para $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ entonces sea $g_0(a) := \Sigma^n_{i=1} q_i f(x_i)$.
2. **Caso 2:** Si $a \in E_{<X>_{\mathfrak{A}}}(D_{<X>_{\mathfrak{A}}})$, se tiene que $a = E(\Sigma^n_{i=1} q_i x_i)$ entonces sea $g_0(a) := E(\Sigma^n_{i=1} q_i f(x_i))$.

Por definición se tiene que $f \subseteq g_0$, $g_0 : D_{<X>_{\mathfrak{A}}} \cup E_{<X>_{\mathfrak{A}}}(D_{<X>_{\mathfrak{A}}}) \to D_{<Y>_{\mathfrak{B}}} \cup E_{<Y>_{\mathfrak{B}}}(D_{<Y>_{\mathfrak{B}}})$ y dado que f es un $L-$monomorfismo parcial y que en nuestro lenguaje podemos escribir combinaciones lineales de elementos de X se tiene que g_0 es un $L-$monomorfismo parcial.

Para extender g_0, recuerde que

$$\mathbb{Q}(D_{<X>_{\mathfrak{A}}} \cup E_{<X>_{\mathfrak{A}}}(D_{<X>_{\mathfrak{A}}})) = \bigcup_{Z \subseteq_{fin} D_{<X>_{\mathfrak{A}}} \cup E_{<X>_{\mathfrak{A}}}(D_{<X>_{\mathfrak{A}}})} \mathbb{Q}(Z)$$

y que dado $Z = \{z_1, ..., z_n\}$ se cumple que:

$$\mathbb{Q}(z_1, ...z_n) = \{p(z_1, ..., z_n)/q(z_1, ..., z_n) | p, q \in \mathbb{Q}[Z] \text{ y } q(z_1, ..., z_n) \neq 0\}.$$

[6]Dichos hechos se tocan en el apéndice B y se desarrollan en [21].

Definamos $g :< X >_{\mathfrak{A}} \to < Y >_{\mathfrak{B}}$ como sigue:

$$p(x_1, ..., x_n)/q(x_1, ..., x_n) \mapsto p(g_0(x_1), ..., g_0(x_n))/q(g(x_1), ..., g(x_n)).$$

Afirmamos que $f \subseteq g$ es un $L-$isomorfismo.

Primero note que es suficiente con que demostremos que es isomorfismo de campos, pues g_0 se comporta bien con la exponencial y el dominio de la exponencial no crece del dominio de g_0 al de g.

Para probar que es isomorfismo de campos, probemos que dado $Z \subseteq_{fin} D_{<X>_{\mathfrak{A}}} \cup E_{<X>_{\mathfrak{A}}}(D_{<X>_{\mathfrak{A}}})$ entonces $g \restriction_{\mathbb{Q}(Z)}: \mathbb{Q}(Z) \to \mathbb{Q}(g(Z))$ es isomorfismo.

Note que es posible escribir polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$ en nuestro lenguaje y como g es un $L-$monomorfismo parcial se tiene que

$$\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(Z) = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(g(Z)),$$

por lo que $g \restriction_{\mathbb{Q}(Z)}$ es isomorfismo.

El hecho de que $g :< X >_{\mathfrak{A}} \to < X >_{\mathfrak{B}}$ es $L-$isomorfismo se sigue de la finitud de los polinomios. $\square$

Lema 5.2.1. *Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}', \mathfrak{B}' \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ tal que $\mathfrak{C} \precsim \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}' \precsim \mathfrak{B}'$ y $\mathfrak{C} \cong_g \mathfrak{C}'$. Sean $\bar{a} \in B^n$ y $\bar{a}' \in B'^n$ tal que $C \cup \{\bar{a}\} \precsim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}$ y $C' \cup \{\bar{a}'\} \precsim_{\mathfrak{B}'} \mathfrak{B}'$. Si existe un $L-$isomorfismo f de $< C \cup \{\bar{a}\} >_{\mathfrak{B}}$ a $< C' \cup \{\bar{b}'\} >_{\mathfrak{B}'}$ tal que $f(\bar{a}) = \bar{b}$ y $\forall c \in C(f(c) = g(c))$ entonces*

$$tp^{L^*}_{qf_{\mathfrak{B}}}(\bar{a}/C) = tp^{L^*}_{qf_{\mathfrak{B}'}}(\bar{a}'/C').$$

Demostración. La prueba es sumamente técnica y puede ser consultada en [31]. $\square$

Con dichas proposiciones estamos en posición de demostrar la primera condición de $\aleph_0-$homogeniedad.

Corolario 5.2.2. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, $G \subseteq A$ y $G' \subseteq B$ tales que G, G' son vacíos o numerables y cerrados y $g : G \to G'$ un L^*-isomorfismo. Si $x \in A$ y $x' \in B$ son independientes de G y G' respectivamente entonces $g \cup \{(x, x')\}$ es un L^*-monomorfismo parcial.*

Demostración. Sean $x \notin Ecl(G)$ y $x' \notin Ecl(G')$. De donde por las proposiciones 5.2.4 y 5.2.5 existe un $L-$isomorfismo f de $< G \cup \{x\} >_{\mathfrak{A}}$ a $< G' \cup \{x'\} >_{\mathfrak{B}}$ tal que $f \supseteq g$ y $f(x) = x'$.

Por otro lado, si G es cerrado y x es independiente de G por el corolario 5.2.1 $G \cup \{x\} \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$; mientras que si $G = \emptyset$, por la proposición 5.2.3 $\{x\} = G \cup \{x\} \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$. Análogamente podemos concluir que $G' \cup \{x'\} \precsim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}$. Además, si G y G' son cerrados se tiene que $G \precsim \mathfrak{A}$ y que $G' \precsim \mathfrak{B}$ por la proposición 5.1.3; mientras que si $G = \emptyset$, por la propiedad de Schanuel se tiene el resultado deseado.

Por lo tanto, por el lema anterior se tiene que:

$$tp^{L^*}_{qf_{\mathfrak{A}}}(x/G) = tp^{L^*}_{qf_{\mathfrak{B}}}(x'/G').$$

Por lo que la definición de L^*-monomorfismo parcial concluimos que $g \cup \{(x, x')\}$ es un L^*-monomorfismo parcial.

$\square$

Antes de pasar a la segunda condición de $\aleph_0-$homogeniedad es pertinente demostrar dos pequeñas proposiciones.

Proposición 5.2.6. *Sean* $\mathfrak{A} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, $Ker(E_{\mathfrak{A}}) = \tau\mathbb{Z}$, $X \subseteq_{fin} A$, $\tau \in X \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$ *y* $\bar{a} \in A^n$ *tal que* $\{\bar{a}\}$ *es linealmente independiente y que* $\langle \bar{a} \rangle \cap \langle X \rangle = \{0\}$ *entonces* $Loc_{\mathfrak{A}, X \cup E(X)}(\bar{a}, E(\bar{a}))$ *es irreducible, rotundo y libre sobre* $< X >_{\mathfrak{A}}$.

Demostración. Como por definición es la mínima variedad que contiene a $(\bar{a}, E(\bar{a}))$ es irreducible.

Para probar que es rotunda, sea $M \in Mat_{n\times n}(\mathbb{Z})$. Como $M\bar{a} \in D$, dado que $X \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$ se tiene que:

$$\delta(M\bar{a}/X) \geq 0.$$

Luego $lin(\bar{a}/X) = n$, por un argumento análogo al del lema 3.2.1 se tiene que $rg(M) = lin(M\bar{a}/X)$, es decir,

$$tr(M\bar{a} \cup E(M\bar{a})/X \cup E(X)) \geq lin(M\bar{a}/X) = rg(M).$$

Debido a que por la proposición 1.3.4

$$tr(M\bar{a} \cup E(M\bar{a})/X \cup E(X)) = dim(Loc_{\mathfrak{A}, X\cup E(X)}(M\bar{a}, E(M\bar{a})))$$

y que por el lema 3.2.4 $dim(Loc_{\mathfrak{A}, X\cup E(X)}(M\bar{a}, E(M\bar{a}))) = dim([M]Loc_{\mathfrak{A}, X\cup E(X)}(\bar{a}, E(\bar{a})))$ concluimos que

$$dim([M]Loc_{\mathfrak{A}, X\cup E(X)}(\bar{a}, E(\bar{a}))) \geq rg(M).$$

Para probar que es libre de dependencia aditiva procedamos por contradicción, es decir, supongamos que hay un $\bar{k} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{\bar{0}\}$ tal que $\Sigma^n_{i=1} k_i z_i - x' \in \mathbb{I}_{<X>_{\mathfrak{A}}}(V)$ y $x' \in D_{<X>_{\mathfrak{A}}}$. Como $D_{<X>_{\mathfrak{A}}} =< X >$ entonces $x' = \Sigma^m_{i=1} q_i x_i$. De donde como $(\bar{a}, E(\bar{a}))$ es genérico, se tiene que

$$\Sigma^n_{i=1} k_i a_i - \Sigma^m_{i=1} q_i x_i = 0.$$

Por ende,

$$\Sigma^n_{i=1} k_i a_i = \Sigma^m_{i=1} q_i x_i,$$

como $\langle \bar{a} \rangle \cap \langle X \rangle = \{0\}$ y $\{\bar{a}\}$ es linealmente independiente, se tiene que $k_i = 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, lo cual es una contradicción con la hipótesis. Por lo que, la variedad sí es libre de dependencia aditiva.

La prueba de que es libre de dependencia multiplicativa es análoga a la anterior sólo que utlizamos el logaritmo y el hecho de que $\tau \in X$.

□

Proposición 5.2.7. *Sean* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, $C \subseteq \mathfrak{A}$ *y* $C' \subseteq \mathfrak{B}$. *Si* $f : C \to C'$ *es un* L^*-*monomorfismo parcial y* $\bar{a} \in A^n$ *y* $\bar{b} \in B^n$ *son tales que* $\mathbb{I}_{\mathfrak{A}, <C>_{\mathfrak{A}}}(\bar{a}, E(\bar{a})) = \mathbb{I}_{\mathfrak{B}, <C'>_{\mathfrak{A}}}(\bar{b}, E(\bar{b}))$ *y* $Loc_{\mathfrak{A}, <C>_{\mathfrak{A}}}(\bar{a}, E(\bar{a}))$ *es kummer genérico, entonces*

$$tp^L_{qf_{\mathfrak{A}}}(\bar{a}/C) = tp^L_{qf_{\mathfrak{B}}}(\bar{b}/C).$$

Demostración. La prueba se realiza por inducción sobre la formación de fórmulas usando el hecho de que las fórmulas son básicamente polinomios exponenciales y como por hipótesis ambas tuplas cumplen los mismo polinomios se tiene el resultado deseado. La razón por la cual se pide la hipótesis extra de que $Loc_{\mathfrak{A}, <C>_{\mathfrak{A}}}(\bar{a}, E(\bar{a}))$ sea kummer genérico es porque en las fórmulas ocurren términos de la forma $E((1/m)a)$.

□

Con ambas proposiciones en mente estamos en posición de probar un primer acercamiento a la segunda condición, la cual llamaremos $\aleph_0-$homogeniedad sobre el $\emptyset$.

Lema 5.2.2. *($\aleph_0-$homogeniedad sobre el $\emptyset$) Sea $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ y sea f un L^*-monomorfismo parcial tal que el $dom(f) = X$ es finito y $|X| = n$. Si $y \in Ecl(X)$ entonces existe $y' \in B$ tal que $f \cup \{(y, y')\}$ es un L^*-monomorfismo parcial.*

Demostración. Primero note que podemos suponer sin pérdidad de generalidad que $\tau \in X$, ya que sino fuera así, lo agregamos y definimos $f' = f \cup \{(\tau, \tau')\}$, donde τ' es el generador del núcleo en $\mathfrak{B}$, y que $X \backslash \{\tau\}$ es independiente respecto a $Ecl_{\mathfrak{A}}$ pues en caso que no lo sea nos tomamos una base. La prueba se divide en dos casos:

1. **Caso 1:** Sea $y \in Ecl(X)$ linealmente dependiente de X, entonces $y = \Sigma_{i=1}^{n} q_i x_i$ tal que $q_i = m_i/n_i \ \forall i \in \{1, ..., n\}$. Sea $y' = \Sigma_{i=1}^{n} q_i f(x_i)$. Afirmamos que $f \cup \{(y, y')\}$ es un L^*-monomorfismo parcial.

   Sea $\phi(v_1, ..., v_n, v_{n+1})$ una fórmula libre de cuantificadores. Considere $\psi(v_1, ..., v_n)$ la fórmula que se obtiene de ϕ al sustituir todas las ocurrencias de v_{n+1} por $\Sigma_{i=1}^{n} 1/m_i(n_i v_i)$. Note que dicho elemento lo podemos escribir en nuestro lenguaje, ya que contamos con las funciones $1-$arias de multiplicar por $1/m$. Ahora bien, es claro que

   $$\mathfrak{A} \models \phi[x_1, ..., x_n, y] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[x_1, ..., x_n].$$

   Dado que ψ es una libre de cuantificadores y f es L^*-monomorfismo parcial se tiene

   $$\mathfrak{A} \models \psi[x_1, ..., x_n] \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[f(x_1), ..., f(x_n)] \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[f(x_1), ..., f(x_n), y'].$$

   De donde concluimos que

   $$\mathfrak{A} \models \phi[x_1, ..., x_n, y] \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[f(x_1), ..., f(x_n), y'].$$

   Por lo que $f \cup \{(y, y')\}$ es un L^*-monomorfismo parcial.

2. **Caso 2:** Sea $y \in Ecl(X)$ linealmente independiente de X. Por el lema 2.3.1, hay $\bar{y}' \in Ecl(X)^{m-1}$, podemos tomarlo ahí ya que lo estamos realizando respecto al modelo $Ecl(X)$, linealmente independiente tal que $\langle X \cup \{y\} \rangle \cap \langle \bar{y}' \rangle = \{0\}$ y $\delta_{Ecl(X)}(X \cup \{y, \bar{y}'\}) = \partial_{Ecl(X)}(X \cup \{y\})$. Dado que $Ecl(X) \precsim \mathfrak{A}$ se tiene que $\delta_{\mathfrak{A}}(X \cup \{y, \bar{y}'\}) = \partial_{\mathfrak{A}}(X \cup \{y\})$.

   Afirmamos que $\delta_{\mathfrak{A}}(\{y, \bar{y}'\}/X) = \delta_{\mathfrak{A}}(X \cup \{y, \bar{y}'\}) - \delta_{\mathfrak{A}}(X) = 0$.

   - $\boxed{\leq}$ Como $\delta(X \cup \{y, \bar{y}'\}) = \partial(X \cup \{y\})$ y $y \in Ecl(X)$ se tiene que $\delta(X \cup \{y, \bar{y}'\}) = \partial(X)$ y dado que la dimensión es el mínimo y $\delta(X)$ es uno de los elementos del conjunto se tiene que

     $$\partial(X) - \delta(X) \leq 0.$$

     Por lo que

     $$\delta(X \cup \{y, \bar{y}'\}) - \delta(X) \leq 0.$$

   - $\boxed{\geq}$ Como $X \backslash \{\tau\}$ es independiente, por las proposiciones 5.2.1 y 5.2.3 $X \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$ y como $\{y, \bar{y}'\} \subseteq A$ se tiene que

     $$\delta(\{y, \bar{y}'\}/X) = \delta(\{y, \bar{y}'\} \cup X) - \delta(X) \geq 0.$$

Por lo tanto, $\delta_{\mathfrak{A}}(\{y, \bar{y}'\}/X) = 0$.

Note que $X \cup \{y, \bar{y}'\} \precsim_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$ pues dado $Z \subseteq_{fin} A$ se tiene que

$$\delta(Z/X \cup \{y, \bar{y}'\}) = \delta(Z \cup X \cup \{y, \bar{y}'\}) - \delta(X \cup \{y, \bar{y}'\}) \geq 0,$$

la última desigualdad se debe a que $\delta(X \cup \{y, \bar{y}'\})$ es el mínimo y el otro sumando es un elemento del conjunto.

Por otro lado, como y es linealmente independiente de X, $\bar{y}'$ es independiente y $\langle X \cup \{y\}\rangle \cap \langle \bar{y}'\rangle = \{0\}$, se tiene que $\{y, \bar{y}'\}$ es linealmente independiente y que $\langle X\rangle \cap \langle \{y, \bar{y}'\}\rangle = \{0\}$. De donde por la proposición 5.2.6

$$Loc_{\mathfrak{A}, X \cup E(X)}(y, \bar{y}', E(y), E(\bar{y}'))$$

es irreducible y libre sobre $< X >_{\mathfrak{A}}$, además podemos suponer que es kummer genérico, pues en caso de que no lo sea nos tomamos el $m \in \mathbb{N}$ para el cual se satisfaga (ver el teorema 3.2.1). Considerando la variedad $V \subseteq A^{n+m} \times (A^*)^{n+m}$ al dejar libres en los polinomios de $\mathbb{I}(Loc_{\mathfrak{A}, X \cup E(X)}(y, \bar{y}', E(y), E(\bar{y}')))$ las ocurrencias de $X \cup E(X)$ se satisface que

$$\mathfrak{A} \vDash R_V[X].$$

Como f es un L^*-monomorfismo parcial tenemos que

$$\mathfrak{B} \vDash R_V[f(X)]$$

Luego por la interpretación de R_V existe $\{u, \bar{u}'\} \subseteq Ecl(f(X))$ tal que $(u, \bar{u}', E(u), E(\bar{u}'))$ es genérico en V sobre $< F(X) >_{\mathfrak{B}}$. De donde por la proposición 5.2.7 concluimos que

$$tp^L_{qf_{\mathfrak{A}}}(y, \bar{y}'/X) = tp^L_{qf_{\mathfrak{B}}}(u, \bar{u}'/f(X)).$$

Ahora bien, afirmamos que

$$f(X) \cup \{u, \bar{u}'\} \precsim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}$$

o equivalentemente que $\partial(f(X)) = \delta(f(X) \cup \{u, \bar{u}'\})$. Para probar esto último procedamos por contradicción. Supongamos que $\partial(f(X)) = \delta(Z \cup f(X)) < \delta(f(X) \cup \{u, \bar{u}'\})$.

Dado que $\delta(\{y, \bar{y}'\}/X) = 0$ y que los tipos libres de cuantificadores sobre L son iguales, se tiene que $\delta(\{u, \bar{u}'\}/f(X)) = 0$, es decir,

$$\delta(\{u, \bar{u}'\} \cup f(X)) = \delta(f(X)).$$

Por ende, $\delta(Z \cup f(X)) < \delta(f(X))$ o equivalentemente $\delta(Z/f(X)) < 0$.

Por otro lado, como $X \backslash \{\tau\}$ es Ecl independiente y f es un L^*-monomorfismo parcial se tiene que $f(X \backslash \{\tau\})$ es independiente y por las proposiciones 5.2.1 y 5.2.2 $f(X) \precsim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}$. Por lo tanto, $\delta(Z/f(X)) \geq 0$, lo cual es una contradicción.

De ahí que:

$$f(X) \cup \{u, \bar{u}'\} \precsim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}.$$

Por lo tanto, por el lema 5.2.1 se tiene que

$$tp^{L^*}_{qf_{\mathfrak{A}}}(y, \bar{y}'/X) = tp^{L^*}_{qf_{\mathfrak{B}}}(u, \bar{u}'/f(X)).$$

Por lo que $f \cup \{(y, u)\}$ es el L^*-monomorfismo parcial buscado.

□

El siguiente corolario generaliza el lema anterior.

Corolario 5.2.3. *Sea $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ y sea f un L^*-monomorfismo parcial tal que el $dom(f) = X$ es finito y que $|X| = n$. Si $\bar{y} \in Ecl(X)^n$ entonces existe $\bar{y}' \in B^n$ tal que $f \cup \{(y_i, y_i')\}_{i\in\{1,...,n\}}$ es un L^*-monomorfismo parcial.*

Demostración. Construiremos $f \cup \{(y_i, y_i')\}_{i\in\{1,...,n\}}$ por recursión sobre $i \leq n$.

- Sea $i = 1$, entonces por el lema 5.2.2 existe y_1' tal que $f \cup \{(y_1, y_1')\}$ es un L^*-monomorfismo parcial.
- Sea $i = j + 1$, entonces por construcción tenemos que $g = f \cup \{(y_i, y_i')\}_{i\in\{1,...,j\}}$ es un L^*-monomorfismo parcial tal que $dom(g)$ es finito. También como $y_{j+1} \in Ecl(X)$ entonces $y_{j+1} \in Ecl(X \cup \{y_1, ..., y_j\})$, por lo que por el lema anterior concluimos que hay y_{j+1}' tal que $f \cup \{(y_i, y_i')\}_{i\in\{1,...,j+1\}}$ es un L^*-monomorfismo parcial.

Por lo tanto, después de n pasos contaremos con el L^*-monomorfismo parcial deseado. □

Pasemos a la prueba de $\aleph_0-$homogeniedad en el caso general.

Lema 5.2.3. *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$, $G \subseteq A$ cerrado y numerable y $G' \subseteq B$ cerrado y numerable, $G \cong_g G'$. Si f es un L^*-monomorfismo parcial tal que el $dom(f) = X$ es finito y que $|X| = n$. Si $y \in Ecl(X \cup G)$ entonces existe $y' \in B$ tal que $g \cup f \cup \{(y, y')\}$ es L^*-monomorfismo parcial.*

Demostración. La prueba se encuentra en [8], desafortunadamente no realizaremos la prueba, ya que se utiliza maquinaria que no se desarrolló en este trabajo. □

5.3. Conclusiones

Después de tanto trabajo es momento de recolectar los frutos.

Teorema 5.3.1. *$\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ es una clase cuasiminimal excelente.*

Demostración. Por la sección 5.1 y 5.2 se tiene que $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ satisface las primeras dos condiciones de ser clase cuasiminimal excelente. Por el trabajo de Martin Bays, Bradd Hart, Tapani Hyttinen, Meeri Kesälä, y Jonathan Kirby [9] se tiene que la propiedad de excelencia se sigue de estas dos y por lo tanto, $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ es un clase cuasiminimal excelente.[7] □

Teorema 5.3.2. *$\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ es no numerable categórica.*

Demostración. Del teorema anterior y de la primera observación del capítulo, se tiene que $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ cumple con las hipótesis del Teorema* y por el Teorema* se tiene que $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ es no numerable categórica. □

Por lo tanto, en particular contamos con un único campo pseudo-exponencial de tamaño del continuo. De ahí que surja la pregunta de si $\mathbb{C}_{exp}$ es dicho modelo y justamente ello es lo que afirma la conjetura de Zilber.

[7] La prueba de dicho hecho como se mencionó en la capítulo 4. se encuentra fuera de los propósitos de este escrito.

Conjetura de Zilber. *El campo pseudo-exponencial de cardinalidad* $2^{\aleph_0}$ *es isomorfo a* $\mathbb{C}_{exp}$.

Note que en particular si la conjetura de Zilber es cierta entonces la conjetura de Schanuel es cierta dado que el axioma III es una generalización de la conjetura de Schanuel.

Con dicha conjetura terminamos este trabajo esperando poder demostrar en algún momento la conjetura de Zilber, la cual en palabras de Kirby “esta lejos de ser alcanzada”[16].

Appendices

Apéndice A

Thumbtack Lema

Como se mencionó en el teorema 3.2.1, no vamos de demostrar el Thumbtack Lema (probablemente podría ser un tema de tesis por si sólo) pero creemos que es pertinente enunciarlo y entender su importancia.

El lema fue enunciado y demostrado parcialmente por Zilber en [32]. Decimos que parcialmente, dado que Bays encontró un error en el artículo original, lo que dió lugar a un nuevo artículo [7] por Bays y Zilber en el cual se corrigieron dichos errores.

El enunciado que nosotros daremos en este apéndice es la versión 3 del Thumbtack Lema dada por Kirby en [17].

Thumbtack Lema. *Sea $F = K(a_1, ..., a_r, \sqrt{b_1}, ..., \sqrt{b_r})$ tal que K es un campo algebraicamente cerrado de característica cero. Supongamos que $c_1, ..., c_m$ se encuentran en una extensión de F tales que son multiplicativamente independientes de $K^* \cup \{b_1, ..., b_r\}$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ y raíces $N-$ésimas $c_{1,N}, ..., c_{m,N}$ tal que existe un único tipo de isomorfismo de los sistemas adecuados de raíces de $\{c_{1,N}, ..., c_{m,N}\}$ sobre F.*

Observación 6. *Note que $c_1, ..., c_m$ deben estar necesariamente en una extensión propia de K, ya que si están en K, como K es por hipótesis algebraicamente cerrado, entonces podemos diferenciar todas la $n-$ésimas raíces entre si.*

Apéndice B

La dimensión es definible en los campos algebraicamente cerrados característica cero

Lo que demostraremos en este apéndice es que la dimensión es definible en los campos algebraicamente cerrados de característica cero, vistos como la clase de estructuras ACF_0 en el lenguaje

$$L_0 = \{c_0, c_1\} \cup \{-, +, \cdot\} \cup \{1/m\cdot\}_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}}$$

y que satisfacen el axioma I de $T_{\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}}$.

Observe que toda variedad en el lenguaje original L^* es definible en el lenguaje L_0 y que toda variedad es definible por una fórmula en $L_{\omega,\omega}$ por el Teorema de las Bases de Hilbert. Por la primera observación, se tiene que si demostramos que la dimensión es definible en ACF_0, entonces la dimensión será definible en $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$. La segunda, nos permite trabajar en $L_{\omega,\omega}$, por lo que en el resto del apéndice todas las definiciones y afirmaciones serán respecto a $L_{\omega,\omega}$.

Como se menciona en el escrito, la prueba requiere de ciertos conceptos que no han sido introducidos hasta este momento. Lo que haremos en un primer momento será introducir algunas definiciones y ciertos hechos que nos serán útiles en el momento de la prueba.[1]

Definición B.0.1. Un modelo $\mathfrak{A}$ es fuertemente minimal, si para todo $X \subseteq A$ definible se satisface que X es finito o $A\setminus X$ es finito.

Una teoría T es fuertmente minimal si todo modelo de T es fuertemente minimal.

Hecho B.0.1. *La teoría de los campos algebraicamente cerrados de característica cero es fuertemente minimal.*

Antes de continuar es preciso introducir un poco de notación. Dados $\mathfrak{A}$ un modelo en el lenguaje L', una fórmula $\phi(\bar{x};\bar{y})$ con $n+m$ variables libres y $\bar{b} \in A^m$ tenemos que:

$$\phi(A^n;\bar{b}) := \{\bar{a} \in A^n | \mathfrak{A} \vDash \phi(\bar{a},\bar{b})\}.$$

[1] En caso que no le sea suficiente al lector este pequeño resumen de conceptos, le sugerimos consultar las secciones 6.1 y 6.2 de [21].

Definición B.0.2. Dados $\mathfrak{A}$ un modelo en el lenguaje L' y $\phi(\bar{x})$ una fórmula en el lenguaje L'_A, donde $L_A = L' \cup \{c_a | a \in A\}$, definimos el **Rango de Morley respecto a $\mathfrak{A}$**, denotado por $RM^{\mathfrak{A}}(\phi)$, de $\phi(\bar{x})$ de la siguiente manera:

- $RM^{\mathfrak{A}}(\phi) \geq 0$ sii $\phi(A^n) \neq \emptyset$.
- Si $\alpha = \beta + 1$. $RM^{\mathfrak{A}}(\phi) \geq \beta + 1$ sii existen $\{\psi_n(\bar{x})\}_{n\in\omega}$ tal que los $\psi_n(A^n)$ son ajenos dos a dos, para toda $m \in \omega$ se satisface que $\psi_m(A^n) \subseteq \phi(A^n)$ y que $RM^{\mathfrak{A}}(\psi_m) \geq \beta$.
- Si α es límite. $RM^{\mathfrak{A}}(\phi) \geq \alpha$ sii $RM^{\mathfrak{A}}(\phi) \geq \beta$ para toda $\beta < \alpha$.

En caso de que $\phi(A) = \emptyset$ convendremos que $RM^{\mathfrak{A}}(\phi) = -\infty$.

Definimos el **Rango de Morley**, denotado por $RM(\phi)$, como el Rango de Morley respecto a un modelos monstruoso[2], a dicho modelo lo denotaremos por $\mathfrak{M}$, es decir,

$$RM(\phi) = RM^{\mathfrak{M}}(\phi).$$

Por otro lado, dado p un tipo, definimos $RM(p) = inf\{RM(\phi)|\phi \in p\}$ y con ello dado, $\bar{a} \in M^n$ y $E \subseteq M$, definimos $RM(\bar{a}/E) = RM(tp(\bar{a}/E))$.

La siguiente proposición contiene los hechos que utilizaremos respecto al Rango de Morley en nuestra prueba.

Hecho B.0.2. *Dados $\mathfrak{M}$ un modelo monstruoso de en una teoría fuertemente minimal y $X, Y \subseteq A^n$ tal que X y Y son definible, entonces se tiene que:*

1. *Dados $\mathfrak{A}$ un modelo chico de la teoría y $Z \subseteq A^n$ definible por la fórmula ϕ, se tiene que $RM^{\mathfrak{A}}(\phi) = RM(\phi)$.*
2. *$RM(X) = 0$ sii X es finito.*
3. *$RM(X \cup Y) = max\{RM(X), RM(Y)\}$.*
4. *$RM(X) = sup\{RM(\bar{a}/E)|\bar{a} \in X, E \subseteq M, |E| < |M|, X$ es E definible$\}$*
5. *$RM(\bar{a}/E) = dim_{acl}(\bar{a}/E)$. Por dim_{acl} nos referimos a la dimensión respecto a la pregeometría acl introducida en el capítulo 4 (página 84).*[3]

Un último hecho que es importante destacar y que nos permite ver la razón por la cual se introdujo el concepto de Rango de Morley en este apéndice es el siguiente.

Hecho B.0.3. *Si $\mathfrak{A}$ es un campo algebraicamente cerrado de característica cero y V es una variedad irreducible entonces $RM(V)$ es la dimensión algebraica de V.*

Por ende, demostraremos que el Rango de Morley es definible en los campos algebraicamente cerrados y con ello tendremos que la dimensión es definible.

Teorema B.0.3. *El rango de Morley es definible en los campos algebraicamente cerrados de característica cero.*

[2]Los lectores que no conozcan dicho concepto, les sugerimos ver la discusión en pag. 219 de [21].

[3]La definición de dimensión relativa es la definición 4.1.6 de este escrito.

Demostración. Sea $\mathfrak{A}$ un campo algebraicamente cerrado de característica cero. Lo que haremos será demostrar que dada una fórmula $\phi(\bar{x};\bar{y})$ tal que $|\bar{x}| = n$, existe un fórmula $\pi_\phi^{n,k}(\bar{y})$ tal que para todo $k \leq n$ y todo $\bar{b} \in A^m$ se satisface que:

$$\mathfrak{A} \vDash \pi_\phi^{n,k}[\bar{b}] \text{ sii } RM(\phi(A^n;\bar{b})) \geq k$$

La prueba la haremos por inducción sobre n.

- Sean $n = 1$ y $\phi(x;\bar{y})$ una fórmula. Como $n = 1$ entonces $RM(\phi(A;\bar{y})) = 0$ o $RM(\phi(A;\bar{y})) = 1$. Por ende únicamente debemos mostrar que la propiedad "≥ 0" y "≥ 1" son definibles.

  Recuerde que $RM(X) \geq 0$ sii X es distinto del vacío por lo que definamos:

  $$\pi_\phi^{1,0}(\bar{y}) = \exists x \phi(x;\bar{y}).$$

  Claramente dicha fórmula cumple lo deseado.

  Ahora bien, recuerde que $RM(X) = 0$ sii X es finito. Por ende $RM(X) \geq 1$ sii X es infinito. Para definir ello, note que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\phi(A;\bar{b})| < N$ o $|A \backslash \phi(A;\bar{b})| < N$ para todo $\bar{b} \in A^m$. Pues si no fuera el caso se tendría que

  $$\{\exists x_1 .... \exists x_n \exists x_{n+1} ... \exists x_{2n}((\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} \phi(x_i;\bar{y})) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} \neg\phi(x_i;\bar{y})))| n \in \omega\}$$

  es satisfacible, lo cual contradice el hecho de que los campos algebraicamente cerrados son fuertemente minimales.

  De donde se tiene que $\phi(A;\bar{b})$ es infinito sii $|\phi(A;\bar{b})| \geq N$. Por lo tanto, sea

  $$\pi_\phi^{1,1}(\bar{y}) := \exists x_1 ... \exists x_N((\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{N} \phi(x_i;\bar{y}))).$$

  Claramente por las reducciones realizadas dicha fórmula cumple lo deseado.

- Supongámoslo para $n-1$ y demostrémoslo para n. Sea $\phi(\bar{x};\bar{y})$ una fórmula, se tiene que para todo $\bar{b} \in A^m$ el $MR(\phi(A^n;\bar{b})) \leq n$. Por lo que sólo hay que ver que las propiedades "$\geq k$" con $k \in \{1, ..., n\}$ son definibles.

  Para el caso $k = 0$, note que $MR(\phi(A^n;\bar{b})) \geq 0$ sii $\phi(A^n;\bar{b})$ es no vacío, por lo que sea:

  $$\pi_\phi^{n,0}(\bar{y}) := \exists x_1 ... \exists x_n \phi(x_1, ..., x_n;\bar{y}).$$

  Claramente dicha fórmula cumple lo deseado.

  Ahora bien, sea $k \in \{1, ..., n-1\}$. Considere $\psi(x_2, ..., x_n;\bar{y}) = \exists x_1 \phi(\bar{x};\bar{y})$, para simplificar la notación, sea $(x_2, ..., x_n) = \bar{x}_-$. Como $\psi(\bar{x}_-;\bar{y})$ es tal que $|\bar{x}_-| = n-1$ por hipótesis de inducción existe $\pi_\psi^{n-1,k}(\bar{y})$ tal que para todo $\bar{b} \in A^m$ se cumple que:

  $$\mathfrak{A} \vDash \pi_\psi^{n-1,k}[\bar{b}] \text{ sii } RM(\psi(A^{n-1};\bar{b})) \geq k.$$

Por otro lado, considere

$$B_{\bar{b}} = \{\bar{a} \in A^{n-1} | \{c \in A | \mathfrak{A} \models \phi[c; \bar{a}, \bar{b}]\} \quad \text{es infinito}\}.$$

Por un razonamiento análogo a lo que se hizo en la base, existe un N tal que:

$$\bar{a} \in B_{\bar{b}} \ \text{ sii } \ |\{c | \mathfrak{A} \models \phi[c; \bar{a}, \bar{b}]\}| > N.$$

De donde tenemos que $B_{\bar{b}}$ es definible por:

$$\delta(\bar{x}_-; \bar{y}) := \exists z_1 .... \exists z_N ((\bigwedge_{i \neq j} z_i \neq z_j) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{N} \phi(z_i; x_2, ..., x_n; \bar{y}))).$$

Debido a ello por hipótesis de inducción hay $\pi_\delta^{n-1,k-1}(\bar{y})$ tal que para todo $\bar{b} \in A^m$ se cumple que:

$$\mathfrak{A} \models \pi_\delta^{n-1,k-1}[\bar{b}] \ \text{ sii } \ RM(\delta(A^{n-1}; \bar{b})) \geq k - 1.$$

Sea $\pi_\phi^{n,k}(\bar{y}) := \pi_\delta^{n-1,k-1}(\bar{y}) \vee \pi_\psi^{n-1,k}(\bar{y})$. Afirmamos que dicha fórmula cumple lo deseado, es decir, para todo $\bar{b} \in A^m$:

$$\mathfrak{A} \models \pi_\delta^{n-1,k-1} \vee \pi_\psi^{n-1,k}[\bar{b}] \ \text{ sii } \ MR(\phi(A^n, \bar{b})) \geq k.$$

$\boxed{\rightarrow}$ La realizaremos por casos.

1. **Caso 1:** Supongamos que $\mathfrak{A} \models \pi_\psi^{n-1,k}[\bar{b}]$, entonces existe $\bar{a}' \in A^{n-1}$ tal que $dim_{acl}(\bar{a}'/\bar{b}) \geq k$ y $\mathfrak{A} \models \exists x_1 \phi(x_1, \bar{a}'; \bar{b})$, por el hecho B.0.2 (4. y 5.). Por la definición de satisfacibilidad, existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[a, \bar{a}'; \bar{b}]$. De donde se tiene que

$$dim_{acl}((a, \bar{a}')/\bar{b}) \geq dim_{acl}(\bar{a}'/\bar{b}) \geq k.$$

Pero como RM es el supremo

$$RM(\phi(A^n; \bar{b})) \geq dim_{Acl}((a, \bar{a}')/\bar{b}),$$

por lo que concluimos que

$$RM(\phi(A^n; \bar{b})) \geq k.$$

2. **Caso 2:** Supongamos que

$$\mathfrak{A} \models \neg\pi_\psi^{n-1,k} \wedge \pi_\delta^{n-1,k-1}[\bar{b}],$$

entonces para todo $\bar{a}' \in A^{n-1}$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[\bar{a}'; \bar{b}]$ tenemos que $dim_{acl}(\bar{a}'/\bar{b}) < k$ y que hay un $\bar{a}''$ tal que $dim_{acl}(\bar{a}''/\bar{b}) \geq k - 1$ y $\mathfrak{A} \models \delta[\bar{a}''; \bar{b}]$. Como $\delta(A^{n-1}; \bar{b}) \subseteq \psi(A^{n-1}; \bar{b})$ entonces concluimos que $dim_{acl}(\bar{a}''/\bar{b}) = k - 1$.
Ahora bien, como $\bar{a}'' \in \delta(A^{n-1}; \bar{b})$ por contrucción tenemos que $Y := \phi(A; \bar{a}'', \bar{b})$ es infinito, ya que los campos algebraicos son fuertmente minimales se tiene que $A \backslash Y$ es finito, sean $a_1, ..., a_n$ sus elementos. Note que $a_i \in acl(\bar{a}'' \cup \bar{b})$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ pues $\gamma(x; \bar{x}_-, \bar{y}) := \neg\phi(x; \bar{x}_-, \bar{y})$ es tal que $\gamma(A; \bar{a}'', \bar{b})$ es finito y que $\mathfrak{A} \models \gamma(a_i; \bar{a}'', \bar{b})$.

Por otro lado, como $dim_{acl}(\bar{a}''/\bar{b}) = k-1$ y $dim_{acl}(A^n) = n > k-1$, entonces existe $a \notin acl(\bar{a}'' \cup \bar{b})$ pero como todos los elementos $A \backslash \phi(A; \bar{a}'', \bar{b})$ se encuentran en la cerradura entonces a es tal que:

$$\mathfrak{A} \models \phi[a, \bar{a}''; \bar{b}]$$

y ademas $dim_{acl}(a/\bar{a}'', \bar{b}) = 1$.

Por ende, $RM(\phi(A^n; \bar{b})) \geq dim_{acl}(\bar{a}'', a/\bar{b})$. Debido a que:

$$dim_{acl}((a, \bar{a}'')/\bar{b}) = dim_{acl}(\bar{a}''/\bar{b}) + dim_{acl}(a/(\bar{a}'', \bar{b}))^4$$

y que por construcción $dim_{acl}(\bar{a}''/\bar{b}) = k-1$ y $dim_{acl}(a/\bar{a}'', \bar{b}) = 1$, concluimos que:

$$RM(\phi(A^n; \bar{b})) \geq k.$$

$\boxed{\leftarrow}$ Supongamos que $RM(\phi(A^n; \bar{b})) \geq k$ entonces hay un $\bar{a} = (a, \bar{a}') \in A^n$ tal que $dim_{acl}(\bar{a}/\bar{b}) \geq k$. De donde se tiene que

$$dim_{acl}(\bar{a}/\bar{b}) = dim_{acl}(\bar{a}'/\bar{b}) + dim_{acl}(a/(\bar{a}', \bar{b})) \geq k.$$

Con ello en mente, dividamos en dos casos:

1. **Caso 1:** Si $dim_{acl}(\bar{a}'/\bar{b}) \geq k$ como $\bar{a}' \in \psi(A^{n-1}; \bar{b})$ entonces $RM(\psi(A^{n-1}; \bar{b})) \geq k$, de donde concluimos que
$$\mathfrak{A} \models \pi_{\psi}^{n-1,k}[\bar{b}]$$
y por ende se satisface la disjunción.
2. **Caso 2:** Si $dim_{acl}(\bar{a}'/\bar{b}) < k$, como $dim_{acl}(\bar{a}/\bar{b}) \geq k$ y $dim_{acl}(a/(\bar{a}', \bar{b})) \leq 1$, concluimos que $dim_{acl}(\bar{a}'/\bar{b}) = k-1$ y $dim_{acl}(a/(\bar{a}', \bar{b})) = 1$. De la segunda igualdad, se sigue que $a \notin Acl(\bar{a}' \cup \bar{b})$ por lo que para todo $\gamma(x; \bar{x}_{-}, \bar{y})$ fórmula se satisface que:
$$\mathfrak{A} \not\models \gamma[a; \bar{a}', \bar{b}] \quad \text{o} \quad \gamma(A; \bar{a}', \bar{b}) \quad \text{es infinito}$$
En particular, ello se satisface para $\phi(\bar{x}; \bar{y})$ y como $\mathfrak{A} \models \phi[\bar{a}; \bar{b}]$ entonces $\phi(A; \bar{a}', \bar{b})$ es infinito. Por lo que por la definición de δ, se cumple que $\bar{a}' \in \delta(A^{n-1}; \bar{b})$ y como $dim_{acl}(\bar{a}'/\bar{b}) = k-1$, concluimos que $RM(\delta(A^{n-1}; \bar{b})) \geq k-1$. Por lo tanto,
$$\mathfrak{A} \models \pi_{\delta}^{n-1,k-1}[\bar{b}]$$
y por ende se satisface la disjunción.

Si $k = n$, entonces $\pi_{\phi}^{n,k}(\bar{y}) := \pi_{\delta}^{n-1,k-1}(\bar{y})$ y por un razonamiento análogo al anterior se cumple lo deseado.

Por lo tanto, el Rango de Morley es definible en los campos algebraicamente cerrados de característica cero. $\square$

Por lo tanto, por el hecho B.0.3 y el teorema anterior se tiene que la dimensión de variedades irreducibles es definible en ACF_0.

[4] Ver [21] para una prueba.

Apéndice C

$\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$ tiene una modelo de dimensión infinita

La razón por la cual este resultado lo presentamos como un apéndice es porque se sigue del capítulo 3., pero para entender el enunciado es necesario haber leido la primera sección del capítulo 4.

Antes de pasar a la construcción del modelo infinito es importante demostrar una pequeña proposición que es cierta para cualquier pregeometría.

Proposición C.0.1. *Sean $\langle \mathfrak{A}, cl \rangle$ una pregeometría y $C = \{c_i\}_{i \in \omega \setminus \{0\}} \subseteq A$. Si para toda $n \in \omega$ se tiene que $c_{n+1} \notin cl(\{c_1, ..., c_n\})$ entonces C es independiente.*

Demostración. La prueba se sigue del principio de finitud y la hipótesis. □

Con ello en mente realicemos la construcción.

Construcción. *Realicemos la siguiente construcción por recursión sobre los naturales:*

- *Si $n = 0$, sea $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{N}\mathfrak{E}$.*
- *Si $n = k + 1$, sea $\mathfrak{B}_{k+1} = \mathfrak{B}_k|(B_k \times B_k^*)$*

Con ello definamos $\mathfrak{B} = \bigcup_{n \in \omega} \mathfrak{B}_n)^{ELA})^{CEA}$.

Por el lema 3.2.2 se tiene que $\mathfrak{B}$ es un campo pseudo-exponencial, ya sólo queda ver que es de dimensión infinita pero para ello será preciso demostrar primero una proposición intermedia.

Proposición C.0.2. *Sea $C = \{c_n | n \in \omega \setminus \{0\}\}$ tal que $(c_{n+1}, E(c_{n+1}))$ es genérico sobre $B_n \times B_n^*$ y $C_n = \{c_i | i \in \{1, ..., n\}\}$ entonces para todo $X \subseteq_{fin} B_n$ y $n \in \omega \setminus \{0\}$ se tiene que*

$$\delta_{\mathfrak{B}_n}(X/C_n) \geq 0.$$

Demostración. La prueba la haremos por inducción fuerte sobre los B_n y por inducción sobre los conjuntos finitos de B_n.

- Sea $k = 1$, es decir, sea $X = \{x\}$. Si $x \in \langle C_{n+1} \rangle$ no hay nada que hacer por lo que supongamos que X es linealmente independiente de $\{c_1, ..., c_{n+1}\}$. Como X es linealmente independiente de $\{c_1, ..., c_{n+1}\}$ lo que debemos demostrar es que $tr(x, E(x)/\{c_1, ..., c_{n+1}\} \cup \{E(c_1), ..., E(c_{n+1})\}) \geq 1$. La prueba de ello se hará por casos dependiendo del primer momento de la construcción en el cual ocurre $\{x, E(x)\}$:

  1. **Caso 1:** Supongamos que $\{x, E(x)\}$ se encuentra por primera vez después de aplicar el paso 9 de la construcción[1], entonces $x = q_1 d + q_2 c_{n+1}$ tal que $d \in D_{\mathfrak{B}_n}$ y $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, observe que $q_2 \neq 0$ pues $x \notin B_n$.
     Si x es algebraicamente independiente sobre $C_{n+1} \cup E(C_{n+1})$ no hay nada que hacer mientras que si es algebraico sobre $C_{n+1} \cup E(C_{n+1})$ entonces existe $p(x_1, y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_k) \in \mathbb{Q}[X]$ tal que
     $$p(x, c'_1, ..., c'_m, E(c''_1), ..., E(c''_k)) = 0.$$
     Afirmamos que $c'_i \neq c_{n+1}$ para toda $i \in \{1, ..., m\}$ y que $c''_i \neq c_{n+1}$ para toda $i \in \{1, ..., k\}$. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $c'_i = c_{n+1}$ para alguna $i \in \{1, ..., m\}$ o que $c''_i = c_{n+1}$ para alguna $i \in \{1, ..., k\}$. Al sustituir x_1 en $p(x_1, \bar{y}, \bar{z})$ por $q_1 x_2 + q_2 y_{n+1}$ nos queda que
     $$p(d, c'_1, ..., c'_m, c_{n+1}, E(c'_1), ..., E(c'_k)) = 0,$$
     dado que $q_2 \neq 0$ y que $d \in B_n$ se tiene que c_{n+1} o $E(c_{n+1})$ es algebraico sobre B_n, lo cual es una contradicción con que $(c_{n+1}, E(c_{n+1}))$ es genérico sobre $B_n \times B^*_n$. Por ende, no puede ser posible que $c'_i = c_{n+1}$ para alguna $i \in \{1, ..., m\}$ o que $c''_i = c_{n+1}$ para alguna $i \in \{1, ..., k\}$.
     Por ende, x es algebraicamente independiente de $C_{n+1} \cup E(C_{n+1})$.
  2. **Caso 2:** Supongamos que $\{x, E(x)\}$ se encuentra por primera vez después de aplicar el operador e, entonces por construcción $E(x)$ es algebraicamente independiente sobre $\{c_1, ..., c_{n+1}\} \cup \{E(c_1), ..., E(c_{n+1})\}$; por lo tanto no hay nada que hacer.
  3. **Caso 3:** Supongamos que $\{x, E(x)\}$ se encuentra por primera vez después de aplicar el operador l, entonces por construcción x es algebraicamente independiente sobre $\{c_1, ..., c_{n+1}\} \cup \{E(c_1), ..., E(c_{n+1})\}$; por lo tanto no hay nada que hacer.
  4. **Caso 4:** Supongamos que $\{x, E(x)\} \subseteq B_n$, entonces $x \notin \langle C_n \rangle$, de donde por hipótesis de inducción x o $E(x)$ es algebraicamente independiente de $C_n \cup E(C_n)$. Realizando un argumento análogo al del caso 1. se sigue que x o $E(x)$ es algebraicamente independiente de $C_{n+1} \cup E(C_{n+1})$.

  Note que ellos son todos los casos, dado que al aplicar el operador a no crece el dominio. Por lo tanto, si $X = \{x\}$ entonces $\delta(x/C_{n+1}) \geq 0$.

- Sea $k = r + 1$, es decir, sea $X = \{x_1, ..., x_{r+1}\}$. Note que por el lema 2.1.3(3) se tiene que
  $$\delta(X \backslash \{x_{r+1}\} \cup \{x_{r+1}\}/C_{n+1}) = \delta(X \backslash \{x_{r+1}\}/C_{n+1}) + \delta(x_{r+1}/X \backslash \{x_{r+1}\} \cup C_{n+1}).$$
  Luego por hipótesis de inducción el primer sumando es mayor o igual a cero y por un argumento análogo al de la base se puede demostrar que el segundo sumando es mayor o igual a cero. De donde se tiene la desigualdad deseado.

[1]Ver página 73.

Por lo tanto, dados $n \in \omega \backslash \{0\}$ y $X \subseteq_{fin} B_n$ se satisface que:

$$\delta(X/C_n) \geq 0.$$

□

Proposición C.0.3. $\mathfrak{B}$ *es de dimensión infinita.*

Demostración. Afirmamos que para toda $n \in \omega \backslash \{0\}$ se tiene que $c_{n+1} \notin Ecl_{\mathfrak{B}}(C_n)^2$. La prueba la haremos por inducción fuerte sobre n.

Como $\mathfrak{B}_{n+1} \precsim \mathfrak{B}$ se tiene que para toda $X \subseteq B_{n+1}$ $\partial_{\mathfrak{B}}(X) = \partial_{\mathfrak{B}_{n+1}}(X)$ y que $\delta_{\mathfrak{B}}(X) = \delta_{\mathfrak{B}_{n+1}}(X)$ por el lema 2.3.3, por lo que trabajaremos con la predimensión y la dimensión respecto a $\mathfrak{B}_{n+1}$ y quitaremos el subíndice.

Por el lema 2.3.1 $\partial(C_{n+1}) = \delta(X \cup C_{n+1})$ para $X \subseteq B_{n+1}$ linealmente independiente tal que $\langle X \rangle \cap \langle \{c_1, ..., c_{n+1}\} \rangle = \{0\}$.

Afirmamos que $\delta(X \cup \{c_{n+1}\}/\{c_1, ..., c_n\}) > 0$.

Por el lema 2.1.3(3) se tiene que

$$\delta(X \cup \{c_{n+1}\}/\{c_1, ..., c_n\}) = \delta(c_{n+1}/\{c_1, ..., c_n\}) + \delta(X/\{c_1, ..., c_{n+1}\})$$

Como $(c_{n+1}, E(c_{n+1}))$ es genérico sobre $B_n \times B_n^*$ se tiene que

$$tr(c_{n+1}, E(c_{n+1})/\{c_1, ..., c_n\} \cup \{E(c_1), ..., E(c_n)\}) = 2$$

por lo que

$$\delta(c_{n+1}/\{c_1, ..., c_n\}) > 0$$

y por la proposición anterior se tiene que $\delta(X/C_{n+1}) \geq 0$.

Por ende,

$$\delta(X \cup \{c_{n+1}\}/\{c_1, ..., c_n\}) = \delta(c_{n+1}/\{c_1, ..., c_n\}) + \delta(X/\{c_1, ..., c_{n+1}\}) > 0,$$

pero note que ello implica por definición de predimensión relativa que:

$$\delta(X \cup C_{n+1}) > \delta(C_n) \geq \partial(\{c_1, ..., c_n\}).$$

Como por hipótesis $\delta(X \cup C_{n+1}) = \partial(C_{n+1})$ se tiene que:

$$\partial(\{c_1, ..., c_{n+1}\}) > \partial(\{c_1, ..., c_n\})$$

Por lo tanto, para toda $n \in \omega \backslash \{0\}$ se cumple que $c_{n+1} \notin Ecl(C_n)$. De donde debido a la proposición C.0.1, se tiene que C es independiente y por ende $\mathfrak{B}$ es de dimensión infinita. □

[2] Utilizaremos la notación de la proposición anterior.

Bibliografía

[1] José A. Amor. Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias. La prensa de ciencias. 2005.

[2] John T. Baldwin. Notes on quasiminimality and excellence. *Bulletin of Sympolic Logic*, 10(3): 305-456, 2004.

[3] John Baldwin. The complex numbers and complex exponentation: Why Infinitary Logic is necessary! Lect. Mat., 27(Numero especial):117–135, 2006.

[4] John T. Baldwin. Categoricity. University Lecture Series, AMS. 2009.

[5] John Baldwin. Unpublished notes: hrutav.pdf. 2009.

[6] John Baldwin. Geometry and Categoricity. pdf. 2010.

[7] Martin Bays y Boris Zilber. Covers of multiplicative groups of algebraically closed fields of arbitrary characteristic. *Bull, London Math. Soc.*, 2011.

[8] Martin Bays y Jonathan Kirby. Excellence and uncountable categoricity of Zilbers exponential fields. Entregado. 2013.

[9] Martin Bays, Bradd Hart, Tapani Hyttinen, Meeri Kesälä, y Jonathan Kirby. Quasi- minimal structures and excellence. *Bull. London Math. Soc.*, 46(1):155163, 2014.

[10] Enderton Herbert. A mathematical introduction to logic. Academic Press. 2001.

[11] Charles Hermite. Sur la fonction exponentielle. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 77 , 1824, 1873.

[12] Joe Harris. Algebraic Geometry: A First Course. Springer. 1992.

[13] Thomas Hungerford. Algebra. Springer. 2000.

[14] Will Johnson. Irreducibility is definable in ACF. pdf. 2014.

[15] Jonathan Kirby. On Quasiminimal Excellent Classes. The Journal of Symbolic Logic, 75: 551-564, 2010.

[16] Jonathan Kirby. A Note on the Axioms of Zilbers Pseudo-Exponential Fields. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 54(3-4): 509-520, 2013.

[17] Jonathan Kirby. Finitely presented exponential fields. *Algebra and Number Theory* 7(4): 943-980, 2013.

[18] Antonio Lascurain. Curso básico de variable compleja. Las prensas de ciencias. 2011.

[19] Ferdinand Lindemann.Über die Zahlπ . Math. Ann. 20, 213225, 1882.

[20] Joseph Liouville. Sur des classes très- étendue de quantités dont la valeur nest ni algébrique, ni même réductibles àdes irrationnelles algébriques. J. Math. Pures Appl. 16, 133142, 1852.

[21] David Marker. Model Theory: An introduction. Springer. 2002.

[22] David Marker. A remark on Zilber's pseudoexponentation. *Journal of Symbolic Logic*, 71(3): 791-798, 2006.

[23] David Marker. Lectures in Infinitary Model Theory. Lecture Notes. 2013.

[24] Diego Marquez y Jonathan Sondow. Schanuel's conjecture and algebraic powers z^w con z y w trascendentes. pdf. 2010.

[25] James Munkres. Topology. Prentice Hall. 2002.

[26] Aigli Papantonopoulou. Algebra: Pure and Applied. Addison Wesley Pub. 2001.

[27] Igor Schafarevich, Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space. Springer. 2013.

[28] Michel Waldschimt. Diophantine Aproximation on Linear Algebreic Groups: Trascendence Properties of the Exponential Function in Several Variables. Springer: 1-21 , 2000.

[29] Karl Weierstrass. Zu Lindemann's Abhandlung: "Ü die Ludolph'she Zahl". S.B. Preuss. Akad. Wiss.,1067-1085,1885.

[30] Alex Wright. Trascendence degree. pdf. 2006.

[31] Boris Zilber. Pseudo-exponentation on algebraically closed fields of characteristic zero. *Annals of Pure and Applied Logic*, 132 (1): 67-95,2005.

[32] Boris Zilber. Covers of the multiplicative group of an algebraically closed field of characteristic zero. *London Math. Soc. (2)*, 74(1):41-58 , 2006.

[33] Boris Zilber. On trascendental number theory, classical analytic functions and Diophantine geometry. 2007.

Notación

- $X \subseteq_{fin} A$: X es subconjunto finito de A.
- $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, ...$ son modelos y $A, B, C...$ son los respectivos universos.
- $\mathcal{E}_{est}$: Es la clase de estructuras que satisfacen los axiomas I y II, campo algebráicamente cerrrado de característica cero y exponencial con núcleo estándar cuyo dominio es A y contradominio es A^*.
- $\mathcal{E}_{est,sch}$: Es la clase de estructuras que satisfacen los axiomas I, II y III, lo anterior y la propiedad de Schanuel.
- $\mathcal{E}^{cn}_{est,sch}$: Es la clase de estructuras que satisfacen los axiomas I, II, III y IV, lo anterior y Ecl satisface CN.
- $\mathcal{EC}^{cn}_{est,sch}$: Es la clase de estructuras que satisfacen los axiomas I, II, III, IV y V, lo anterior y cerradura exponencial-algebráica fuerte.
- $\mathcal{EC}^{cn,*}_{est,sch}$: Los campos pseudo-exponenciales, son las estructuras en el lenguaje extendido L^* tal que satisfacen los axiomas I, II, III, IV y V.
- $\langle X \rangle$: Es el $\mathbb{Q}-$espacio vectorial generado por X.
- $< X >_{\mathfrak{A}}$: Es el campo exponencial generado por X en $\mathfrak{A}$.
- D: D es el dominio de la exponencial del campo pseudo-exponencial $\mathfrak{A}$ en cuestión.
- τ: τ generador del núcleo de la exponencial del campo pseudo-exponencial $\mathfrak{A}$ en cuestión.
- $\mathcal{C}$: es una clase quasiminimal excelente.