LE SYSTÈME PROIE-PRÉDATEUR DE VOLTERRA-LOTKA

12/02/2013

prépa agrég.

Plan

1) Présentation du modèle
2) Existence, unicité, temps?
3) Comportement au voisinage d'un pt d'équilibre

---

1) Présentation du modèle

1.1- Les variables

On s'intéresse à l'évolution de 2 populations d'animaux en interaction : des proies et des prédateurs (ex : sardines / requins avec de vraies observations comme quoi l'arrêt de la pêche (des sardines !) en Adriatique pdt la guerre a nuit aux sardines OU lynx / lapins des données récoltées entre 1845 et 1935 montrent un comportement périodique).

$X(t)$ = nombre de proies au temps t

$Y(t)$ = nombre de prédateurs au temps t.

Ce sont des nombres ! On veut un modèle continu ! Façon de voir : les voir plutôt comme des proportions ; par rapport à des grands nombres conv. fixés X_0 et Y_0. $x(t) = \frac{X(t)}{X_0}$, $y(t) = \frac{Y(t)}{Y_0}$; on compte finalement des "millions de lapins".

1.2 - Hypothèses

• En l'absence de prédateurs, les proies ont un taux de croissance constant $a > 0$, i.e.

$$(1) \qquad \frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t \ x(t)} = a > 0.$$

D'un point de vue EDO, le passage $\Delta t \to 0$ donne $\frac{x'(t)}{x(t)} = a$

(Croissance exponentielle, vision Malthusienne).

(2) En l'absence de proies, les prédateurs disparaissent faute de nourriture : $\dfrac{y'(t)}{y(t)} = -c$, $c>0$ fixé

(3) Interaction 1 : les prédateurs agissent sur les proies comme un taux de croissance négatif proportionnel à leur nombre

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by(t) \qquad b>0 \text{ fixé}$$

(4) Interaction 2 : les proies (nourriture) —— prédateurs —— positif ——

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -c + dx(t), \qquad d>0 \text{ fixé}$$

Bilan

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = (a - by(t))\,x(t) \\ y'(t) = (-c + dx(t))\,y(t) \\ x(0) = x_0 \text{ fixé},\ y(0) = y_0 \text{ fixé}. \end{cases}} \qquad (VL) \qquad x_0, y_0 > 0.$$

1.3 - questions

Évolution de $x(t)$, $y(t)$? Extinction ? En temps fini ? Infini ? Modèle fidèle ?

On n'a pas de résolution analytique, on va donc se contenter de qualitatif et de numérique.

2) Existence

2.1 - Rappels

Existence de solutions ← Cauchy - Lipschitz.

Thm : soit $(P)_{y_0} \left| \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right.$ avec f continue de $0 \ni I \subset \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et localement lipschitzienne en la variable y

alors (P) admet une unique solution maximale ~~sur $[0,T]$~~, déf. sur un intervalle ouvert $[0,T[$

Rq. • loc. lipsch = hyp. minimale mais en pratique on s'en fout, il faut juste savoir que $\mathcal{C}^1$ est suffisant.

• Version générale de C-L. Il y a plus simple, notamment la version "linéaire" car elle s'applique aux SL : si l'on enlève "localement", alors on peut ajouter que la solution est globale, ie $T = \sup I$, et la preuve est plus simple ! (cf. Rouvière).

• Preuve : écrire la formulat° int. de (P) et faire un pt fixe (Gourdon).

• C-L est un rés. d'ex. et d'unicité ; on peut avoir existence locale sous des hyp. plus faibles : seule la continuité de f suffit, c'est Cauchy-Péano. Il peut se démontrer par des arguments de méthode numérique d'Euler explicite (CL aussi. cf Demailly ou ma page. (On perd l'unicité, exo $\left| \begin{array}{l} y'(t) = 3|y|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$)

Déf-Corollaire : si on appelle trajectoire partant de y_0 l'ens. $\{ y(t) \ / \ t \in [0,T[\}$ où y est la sol max de $(P)_{y_0}$, alors on a : deux trajectoires différentes sont disjointes.

On peut aussi s'intéresser à des questions de temps d'existence. (4)

Thm : sous les mêmes hypothèses. Si $T < \sup I$ alors $\forall K$ compact de Ω, $\exists$ un voisinage V de T dans $[0, T[$ tq $y \notin K$, $\forall t \in V$

Remarque : théorème un peu compliqué mais au message simple. Voir une version + simple en prenant $\Omega = \mathbb{R}^n$
↳ ça dit qu'une sol maximale non globale explose en tps fini ! Donc si on arrive à montrer ~~une version~~ que $y(t)$ est bornée, elle est globale ! Par ça + Gronwall on retrouve la globalité en linéaire.
Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ ou si on n'est pas en dim finie il faut utiliser l'énoncé général.

2.2- Application à Volterra-Lotka

. En posant $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ le système devient

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{où} \quad f : (\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(a-by) \\ y(-c+dx) \end{pmatrix}$$

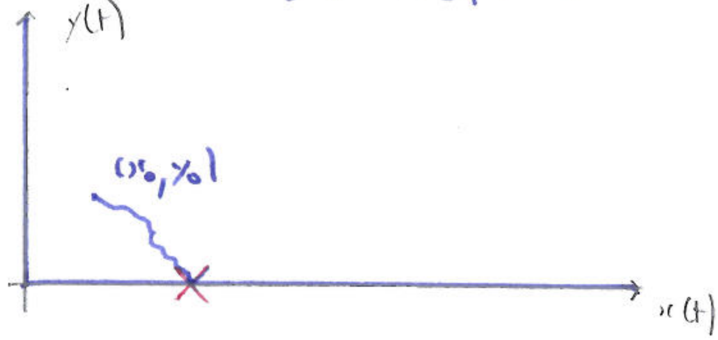
f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc C-L s'applique :
existence et unicité de sol maximale $u(t)$ sur $[0, T[$.

. Un nombre de lapins étant ≥ 0, si le modèle est cohérent il doit respecter ceci. C'est le cas :

Prop. si $x_0 = 0$ alors $x(t) = 0$ $\forall t < T$. De plus, s'il existe t_0 tq $x(t_0) = 0$, alors $x(t) = 0$ $\forall t < T$.
Enfin si $x_0 > 0$, $x(t) > 0$ $\forall t < T$.
De même pour y.

Preuve : si $x_0 = 0$ alors $\begin{vmatrix} x(t) = 0 \\ y(t) = y_0 e^{-ct} \end{vmatrix}$ est solution donc par unicité, $x(t) \equiv 0$.

On a vu que les ens. $\{0\}\times[y_0,+\infty[$ sont des trajectoires



Si $x_0>0$ et $x(t)\leq 0$ par TVI, $\exists t_0$ tq $x(t_0)=0$ donc $x\equiv 0$ donc $x_0=0$, absurde.

Temps d'existence ? On ne sait pas a priori si $u(t)$ est bornée, de plus on n'a pas que $f(u)\leq A\|u\|+B$ (ça ~~suffit aussi~~ suffirait par Gronwall à avoir u bornée) puisque f est quadratique. Il faut quelque chose de plus subtil.

$u(t)=\int_{t_0}^{t} f(u(s))ds$

$\|u(t)\|\leq \int_{t_0}^{t}(A\|u(s)\|+B)ds$

$\leq B(t-t_0)+A\int_{t_0}^{t}\|u(s)\|ds$

donc par Gronwall

$\|u(t)\|\leq B(t-t_0)e^{A(t-t_0)}$

et si $T<+\infty$, u bornée, impossible

Prop. soit $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
$\binom{x}{y}\mapsto dx-c\ln x+by-a\ln y$; alors H est une intégrale première du système (VL), ie

$$\forall t\in[0,T[,\quad H(t)=\text{cste}=H(0).$$

Preuve : déjà par positivité, H est bien définie. De plus comme u est $\mathcal{C}^1$ et H $\mathcal{C}^\infty$, H est dér. et

$$\frac{d}{dt}H(t)=d\,x'(t)-c\,\frac{x'(t)}{x(t)}+by'(t)-a\,\frac{y'(t)}{y(t)}$$

or $x'(t)=(a-by(t))x(t)$
$y'(t)=(-c+dx(t))y(t)$

$$\rightsquigarrow \quad = dx(\cancel{a}-\cancel{by})-c(\cancel{a}-\cancel{by})+b(\cancel{-c}+\cancel{dx})y-a(\cancel{-c}+\cancel{dx})$$

magique !

Remarque : en systèmes dynamiques, un tel système est dit intégrable. On les aime beaucoup car on sait dès lors faire plein de choses.

D'où sort H ? Écrire que $\frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{x(t)(a-by(t))}{y(t)(-c+dx(t))}$

puis séparer les variables et intégrer.

Ex d'intérêt :

Prop : la sol maximale $(x(t), y(t))$ est bornée (et donc $T=+\infty$)

Preuve : on remarque que si $x(t) \to +\infty$, $H \to +\infty$ et on se dit "hum ok...". Essayons de faire ça proprement.

$\exists A>0, \exists B>0$ tq $\left| \begin{array}{ll} \forall x > A & c\ln x < \frac{dx}{2} \\ \forall y > B & a\ln y < \frac{by}{2} \end{array} \right.$ ($\frac{\ln x}{x}$ borné à l'∞).

de + $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $\forall x, y > 0$, $\left| \begin{array}{l} dx - c\ln x \geq \alpha \\ by - a\ln y \geq \alpha \end{array} \right.$ (faire un tab. de variation).

donc en dehors de $[0, A]$ (ie $x > A$) on a

$$H(x,y) \geq \frac{dx}{2} + \left(\frac{dx}{2} - c\ln x\right) + by - a\ln y > \frac{dx}{2} + \alpha$$

de m si $y \geq B$, $H(x,y) > \frac{by}{2} + \alpha$.

donc

$$x \leq \max\left(A, \frac{2}{d}(H(x_0,y_0) - \alpha)\right)$$
$$y \leq \max\left(B, \frac{2}{b}(H(x_0,y_0) - \alpha)\right).$$

3) Étude des points d'équilibre

3.1 - Rappels

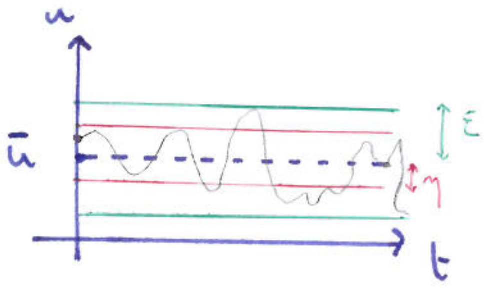
Cadre système d'équadiffs <u>autonome</u> $\left| \begin{array}{l} u'(t) = f(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$ (2)

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cont. et $u_0 \in \Omega$.

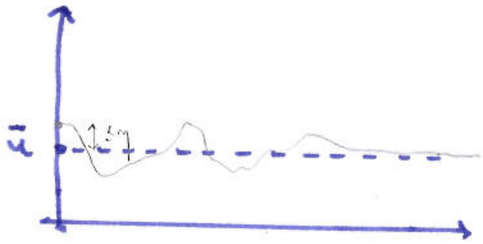
Déf : on dit que $\bar{u} \in \Omega$ est un pt d'équilibre (ou pt stationnaire) de (2) si $f(\bar{u}) = 0$.

Soit $\bar{u} \in \Omega$ un point d'équilibre. On dit que

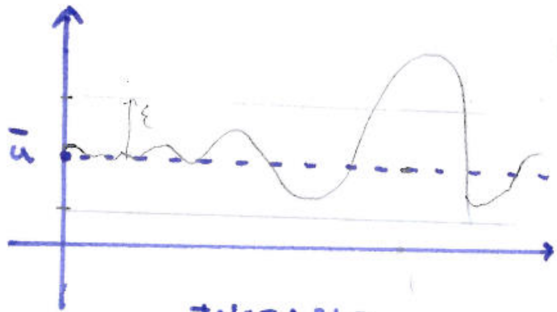
- $\bar{u}$ est stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $\|u_0 - \bar{u}\| < \eta \Rightarrow \|u(t) - \bar{u}\| < \varepsilon \ \forall t \in [0, T[$
- Si de plus $\lim\limits_{t \to +\infty} \|u(t) - \bar{u}\| = 0$ on dit que $\bar{u}$ est asymptotiquement stable.
- Instable = non stable.



STABLE



ASYMP. STABLE



INSTABLE

- <u>Le cas linéaire</u> i.e (2) est (3) $\begin{cases} u'(t) = Au(t) & A \in M_n(\mathbb{R}) \\ u(0) = u_0 & \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

on s'intéresse au pt d'éq 0.

<u>Théorème</u> :

- 0 est asympt. stable $\Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(A), \ Re(\lambda) < 0$
- 0 est stable $\Leftrightarrow (\forall \lambda \in Sp(A), \ Re(\lambda) \leq 0)$

  et $(Re(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ est non défective, i.e $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda Id)) = p =$ la mult. ds le poly carac.$)$

(Preuve : Chambert Loir exos d'analyse T3. ⚠ plein d'erreurs dans ce bouquin.)
réd. de Jordan
Rouvière bien aussi.

- le cas non linéaire

Théorème de linéarisation :

Si f est diff. en $\bar{u}$ tq $f(\bar{u})=0$ alors :

- Si $\forall \lambda \in Sp(Df(\bar{u}))$, $Re(\lambda)<0$, alors $\bar{u}$ est asympt. stable. (preuve ds Rouvière)
- Si $\exists \lambda \in Sp(Df(\bar{u}))$ avec $Re(\lambda)>0$, $\bar{u}$ est instable.

ON NE SAIT RIEN A PRIORI S'IL EXISTE UN λ tq $Re(\lambda)=0$.

exemples : ptêt pour la fin.

- Un outil éventuel pour le cas où on ne sait rien

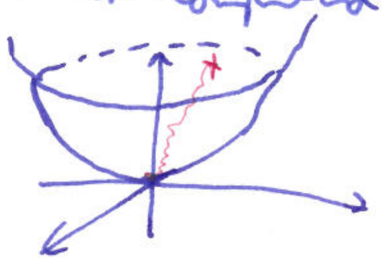
Théorème (Lyapunov)

On suppose que $\bar{u}=0$ (juste une notation).
On dit que $V : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{U}$ vois. de 0 dans Ω) continue, diff. sur $\mathcal{U}\setminus\{0\}$ tq

- $V(0)=0$ et $\forall u \neq 0$, $V(u)>0$
- $\forall u \in \mathcal{U}\setminus\{0\}$, $\langle \nabla V(u), f(u) \rangle \leq 0$

est une fonction de Lyapunov pour u.
S'il existe une telle fonction, alors 0 est stable pour (2)

Rq : preuve ACL encore ou Rouvière je crois. Encore un résultat de systèmes dynamiques. Il est relié à la conserv. de "l'énergie" H, on le verra. La 2è condition signifie que V décroit le long du champ de vecteurs donc moralement on comprend : les trajectoires tombent dans un puits.



3.2 - Applications à (VL)

Calcul : les pts d'éq. sont $(0,0)$ et $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

· $Df(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $Sp(Df(0,0)) = \{\underset{>0}{\underset{\uparrow}{a}}, -c\}$ donc

<u>$(0,0)$ est instable</u> Bien ?

Oui !

sinon tout meurt tout le temps !

· $Df\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cb}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$

$| \quad | = x^2 + \underset{>0}{ac}$ $\rightsquigarrow$ $Sp(\quad) = \pm i\sqrt{ac}$

on ne <u>sait rien</u> !

Mais magie : mq $V(x,y) = H(x,y) - H\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ est de Lyapunov. On a $V\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = 0$. Puis

$\frac{\partial H}{\partial x} = d - \frac{c}{x} = 0$ ssi $x = c/d$

$\frac{\partial H}{\partial y} = b - \frac{a}{y} = 0$ ssi $y = a/b$

dc $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ seul extremum de H.

De ⊕ $H(x,y) \underset{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}}{\to} \infty$ donc

c'est un min. global et dc $V > 0$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \setminus \left\{\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)\right\}$.

puis $\langle f(u), \nabla V(u) \rangle = \begin{pmatrix} (a-by)x \\ (-c+dx)y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d - \frac{c}{x} \\ b - \frac{a}{y} \end{pmatrix}$

$= 0$ comme avant.

DONC $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ est stable $\rightsquigarrow$ on espère donc rester autour de ce pt, en qq sorte. On verra que c'est le cas...

Références

- http://www.gvidf.org plein de choses, dont quasi ce cours.
- [ACL] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot ; Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Analyse 3. (⚠ aux coquilles).
- [Rouvière] F. Rouvière, petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (plein de choses, excellent).
- [Demailly] J.P. Demailly, analyse numérique et équations différentielles. Un peu fort de café, mais contient plein de choses, notamment des preuves (à simplifier !) de Cauchy Lipschitz / Péano par méthode d'Euler et compacité.
- [Murray] J.D. Murray, Mathematical Biology. Pour plus de modélisat° sur Volterra-Lotka.

VOLTERRA - LOTKA : SUITE ET FIN.

I) Quelques exemples de stabilité / instabilité linéaire / non linéaire

II) Méthodes numériques : ce qu'il faut savoir / ne pas savoir le jour J. Un peu de théorie, beaucoup de pratique.

<u>Rq</u> : on n'aura pas le temps de le voir, mais il restait un truc sympa à faire concernant L-V : montrer que les trajectoires sont périodiques. cf. le poly de <u>Grégory Vial</u> (c'est typiquement le genre de belle petite prop. mathématique que vous pouvez démontrer le jour J au tableau, puis ensuite illustrer avec une simu ! En plus, on se rend compte selon la méthode num. utilisée du défaut de périodicité : Euler exp. fait "gagner de l'énergie", Euler imp. en fait perdre ; ça peut structurer toute une présentation en fait ! ☺.

I) Exemples sur la stabilité

Attention à ne pas mélanger le théorème en linéaire et le thm. de linéarisation. Voici des exemples pour voir que tout peut arriver avec un $Re(\lambda)=0$.

Linéarisé \ Système non linéaire	STABLE	INSTABLE
STABLE	$x' = -x^3$ $x' = 0$ ①	$x' = x^3$ $x' = 0$ ②
INSTABLE	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y^{3/2} \end{cases}$ $\begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \end{cases}$ ③	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \end{cases}$ ④

① l'éq. de départ a pour sol $x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1+2x_0^2 t}}$ donc 0 est stable ($\|x(t)\| \leq \|x_0\| \ldots$ même asympt !).

② ici $x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1-2x_0^2 t}}$ donc 0 est instable ; pire encore, il y a explosion en temps fini.

③ Le système non linéaire a pour solutions

$$x(t) = 2\sqrt{y_0} + x_0 - \frac{4\sqrt{y_0}}{2+t\sqrt{y_0}}, \quad y(t) = \frac{4y_0}{(2+\sqrt{y_0}\,t)^2},$$

donc $(0,0)$ est stable (regarder $\|(x,y)\|$ qui se contrôle par $\|(x_0, x_0)\|$).

④ linéarisé instable (résoudre : x a une croissance linéaire !) et système a pour sols. $y(t) = \frac{y_0}{1+y_0 t}$, $x(t) = \ln(1+y_0 t) + x_0$ ⤳ instable aussi.

II) Méthodes numériques

1- Construction des méthodes classiques

$$(S) \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$. On veut approcher la solution sur $[0,T]$

par une suite de valeurs $U_n \simeq u(t_n)$ pour des temps $(t_n)_{0\leq n\leq N}$ formant une subdivision de $[0,T]$. On suppose f $\mathcal{C}^1$ en u (en ⊕ de continue), de sorte que sur $\{u(t) \,/\, t\in[0,T]\}$ (où l'on a pris $T <$ temps max d'existence !) qui est $\subset$ dans un compact, f sera lipschitzienne. On peut aussi ⊕ simplement la supposer lipschitzienne...

On travaillera uniquement avec un pas fixe : $t_n = nh$ pour un certain $h = \lceil \frac{T}{N} \rceil$.

L'idée est alors de partir de u_0 et de définir (U_n) grâce à la formule (exacte !)

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, u(s))\, ds$$

⤳ on pose donc $U_{n+1} = U_n +$ une approximation de cette intégrale.

Selon la méthode d'intégration numérique employée, on tombe sur différentes méthodes : ③

- Les rectangles à gauche donnent <u>Euler explicite</u>

$$\| \; u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n)$$

Géométriquement cela revient à suivre pas à pas le champ de vecteurs $f(t_n, \cdot)$, tout simplement.

- Rectangles à droite → <u>Euler implicite</u>

$$\| \; u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

⚠ C'est une équation à résoudre en u_{n+1}. Si h est assez petit, elle a une solution unique car

$$x = u_n + h f(t_{n+1}, x)$$

peut être vue comme un pb de pt fixe pour la fonction $x \mapsto u_n + h f(t_{n+1}, \cdot)$ qui est hL-lipschitzienne (où L désigne une cte de Lip. de f).

- Trapèzes (+ Euler explicite sur le u_{n+1}) → <u>Heun</u>

$$\| \; u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + h f(t_n, u_n)) \right]$$

- Point-milieu ⊕ approche du temps intermédiaire par Euler implicite donne <u>Heun</u>

$$\left\| \; \begin{cases} u_{n+1/2} = u_n + \frac{h}{2} f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) \\ u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1/2}, u_{n+1/2}) \end{cases} \right.$$

- Simpson donne <u>RK4</u>

$$\left| \begin{array}{l} k_1^n = f(t_n, u_n) \\ k_2^n = f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} k_1^n) \\ k_3^n = f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} k_2^n) \\ k_4^n = f(t_{n+1}, u_n + h k_3^n) \end{array} \right. \quad \leadsto \quad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}\left[k_1^n + 2k_2^n + 2k_3^n + k_4^n \right]$$

2- Consistance et stabilité

- La consistence (un meilleur mot aurait été cohérence) de l'anglais "consistent") (cohérent) mesure la cohérence du schéma : a-t-il un sens ? C'est l'erreur commise en remplaçant les u_n par des $u(t_n)$, i.e. on regarde ce que donne la solution exacte comme restes quand on l'approxime par le schéma.

Exemple sur Euler explicite :

$$\varepsilon_n := u(t_{n+1}) - u(t_n) - hf(t_n, u_n)$$

Par dvp de Taylor (u est $\mathcal{C}^1$) on sait que

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + h \underbrace{u'(t_n)}_{= f(t_n, u(t_n)) \text{ car } u \text{ est sol exacte}} + \frac{h^2}{2} u''(t_n) + o(h^2)$$

(ou $O(h^2)$ si on veut pas voir de u''...)

donc $\varepsilon_n = \frac{h^2}{2} u''(t_n) + o(h^2)$ (ou $O(h^2)$)

Sommons les erreurs : $\varepsilon := \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| \leq \frac{h^2}{2} N^{(h)} \max_{0 \leq n \leq N-1} |u''(t_n)| \leq Ch$

(⚠ $N = \lceil \frac{T}{h} \rceil$)

Voilà ce qu'est en pratique la consistance : sommer les erreurs et regarder si c'est un $O(h)$. On appelle ça de la consistance d'ordre 1. Si on avait eu un $\leq Ch^2$, on aurait dit consistance d'ordre 2. Avec Ch^p, d'ordre p.

En pratique, on la montre toujours avec des dvps de Taylor.

- La stabilité d'un schéma numérique est sa capacité à tenir malgré les erreurs successives (on vient de voir qu'un schéma consistant en commet, des certes petites, mais en commet tout de même).

Exemple sur Euler explicite : on part de (v_n) vérifiant le schéma perturbé

$$v_{n+1} = v_n + hf(t_n, v_n) + \underbrace{\mu_n}_{\text{erreur}}$$

Le but est de contrôler l'erreur globale commise entre (v_n) et (u_n) qui suit le schéma sans erreur

$$\max_{0 \leq n \leq N} |u_n - v_n| \leq C \left(|u_0 - v_0| + \sum_{n=0}^{N-1} |\mu_n| \right) ?$$

Ici on a que $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n + hf(t_n, u_n) - hf(t_n, v_n) - \mu_n$

d'où $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq |u_n - v_n|(1 + Ch) + |\mu_n|$ où C cte de Lipschitz de $f(t_n, \cdot)$

Le lemme de Gronwall discret permet alors d'assurer

$$|u_n - v_n| \leq e^{C\underbrace{(t_n - t_0)}_{\leq T}} |u_0 - v_0| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{C\overbrace{(t_n - t_{i+1})}^{\leq T}} |\mu_i|$$

en posant $S = e^{CT}$ on a

$$|u_n - v_n| \leq S\left(|u_0 - v_0| + \sum_{i=0}^{n-1} |\mu_i|\right)$$ donc Euler explicite est stable.

- La convergence d'un schéma, c'est savoir si $u(t_n)$ est bien approché par u_n. On dit qu'un schéma est convergent d'ordre p si

$$\max_{0 \leq n \leq N} |u_n - u(t_n)| \leq C h^p.$$

Prop : un schéma consistant d'ordre p et stable est convergent d'ordre p.

Preuve : on a tout fait pour : on pose $\forall n$, $v_n = u(t_n)$, alors $\mu_n = \varepsilon_n$ l'erreur de consistance au pas n. En prenant bien sûr $u_0 = u_0$ (le 1er terme de la suite ; celui de l'équadiff)

on a par stabilité,

$$|u_n - u(t_n)| \leq S \sum_{i=0}^{n-1} |\varepsilon_i| \leq SCh^p$$

par consistance d'ordre p

⚠ à comprendre parfaitement et à savoir refaire.

Aparté : lemme de Gronwall discret

Soient des suites $t_n, \theta_n \geq 0$ et $\mu_n \in \mathbb{R}$ tq (t_n) subdivision de $[0, T]$

$$\theta_{n+1} \leq (1 + \Lambda(t_{n+1} - t_n))\theta_n + |\mu_n|$$

alors $\forall n$, $$\theta_n \leq e^{\Lambda(t_n - t_0)} + \sum_{0 \leq i \leq n-1} e^{\Lambda(t_n - t_{i+1})} |\mu_i|$$

Preuve : par récurrence.

$n=0$ donne $\theta_0 \leq \theta_0$, oui.

supp. le rés. au rang n. Alors

$$\theta_{n+1} \leq \left(1+\Lambda(t_{n+1}-t_n)\right)\theta_n + |\mu_n|$$
$$\underset{\text{hdr}}{\leq} \left(1+\Lambda(t_{n+1}-t_n)\right) e^{\Lambda(t_n-t_0)}\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\left(1+\Lambda(t_{n+1}-t_n)\right) e^{\Lambda(t_n-t_{i+1})}|\mu_i| + |\mu_n|$$

Or $1+\Lambda(t_{n+1}-t_n) \leq e^{\Lambda(t_{n+1}-t_n)}$ (convexité de l'exponentielle !)

d'où $\theta_{n+1} \leq e^{\Lambda(t_{n+1}-t_0)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} e^{\Lambda(t_{n+1}-t_{i+1})}|\mu_i| + |\mu_n|}_{\sum_{i=0}^{n} e^{\Lambda(t_{n+1}-t_{i+1})}|\mu_i|}$ ■

---

3) Formalisme général des méthodes numériques

⚠ c'est peu pratique et peu utilisé ; mais ça raccourcit les notations et permet une discussion générale. En pratique : préférez faire les choses à la main, tout en ayant les idées générales en tête.

On écrit un schéma comme un

$$u_{n+1} = u_n + \phi(t_n, h_n, u_n)$$

h_n : en pratique on oublie cette variable car on prend un pas cst h.

Déf : erreur de consistance locale au pas n.

$$\varepsilon_n = u(t_{n+1}) - \phi(t_n, u(t_n))$$ où u est la sol. exacte.

Déf : un schéma est dit consistant d'ordre p si

$$\varepsilon := \sum_{n=0}^{N-1}|\varepsilon_n| = O(h^p)$$

Déf : stabilité.

Soit $v_{n+1} = \phi(t_n, v_n) + \mu_n$. On dit que le schéma associé à ϕ est stable si $\max_{0\leq n\leq N}|u_n - v_n| \leq C\left(|u_0 - v_0| + \sum_{n=0}^{N-1}|\mu_n|\right)$

(où (u_n) suit le schéma sans erreur !).

Thm : si le schéma associé à ϕ est consistant d'ordre p ~~est~~ et stable, il est convergent d'ordre p, ie $\max_{0\leq n\leq N}|u_n - u(t_n)| \leq C h^p$.

Preuve : la même que pour l'exemple, elle contient toute la généralité.

En pratique : on montrera la consistance avec des développements limités. On montrera la stabilité pour des raisons de lipschitzianité et de Gronwall discret. En fait, on a une condition suffisante de stabilité, qui est ce qui se passe en pratique :

|| Le schéma associé à ϕ est stable si ϕ est lipschitzienne en u.

(Encore une fois ceci apparaît clairement dans l'exemple, cette condition permet juste de se ramener à l'hypothèse de Gronwall discret).

TABLEAU DES SCHÉMAS USUELS (et exercice que de le prouver).

schéma	Convergence d'ordre :
Euler exp.	1
Euler imp.	1
Crank-Nicholson	2
Heun	2
RK4	4

Remarques :

- Quel intérêt pour Euler implicite alors ? En fait les méthodes implicites sont plus stables (en un autre sens que celui ci-dessus), cf le texte sur les cinétique chimique, ou [QUA]

Toutes ces choses s'illustrent bien (et se testent !) sur $y' = -\lambda y$, $\lambda >> 1$

Euler exp donne $y_n = y_0 (1-\lambda h)^n$ et si $\lambda h > 2$ la suite change de signe, est non bornée, etc...

Euler implicite donne $y_n = \dfrac{y_0}{(1+\lambda h)^n}$ $\leadsto$ pas de pb $\forall h$.

Moralement : la théorie dit que tout se passe bien quand $h \to 0$, mais dans la vie on a h fixé, et si on veut aller assez loin en temps sans prendre un h minuscule, les méthodes implicites sont bien plus efficaces. (8)

- Partout où l'on a parlé de lipschitzianité, ça peut paraître trop fort : ~~pourquoi~~ en pratique qqch de non linéaire ne pourra pas l'être ! Ce qu'il se passe : on étudie $u(t)$ sur un temps $[0,T]$ avec T fixé inférieur au temps maximal d'existence, donc u, continue sur $[0,T]$, y est borné, et alors f, C^1, sera bien globalement lipschitzienne en u sur ~~l'ensemble~~ le compact où u prend ses valeurs.

Réfs :

- Demailly pour le formalisme général. (⚠ c'est lourd)
- griaf.org pour poursuivre dans l'esprit de ce cours.
- M. Crouzeix, A.L. Mignot, analyse numérique des éq. diff. pour la construction des méthodes par intégration numérique et une présentation agréable.
- Quarteroni, Sacco, Saleri, numerical mathematics (⚠ pavé !) pour plein de choses, dont la notion de stabilité face à $y' = -\lambda y$, aussi pour une preuve de la convergence de la méthode de Newton, qui en pratique sert à résoudre l'éq. de Euler implicite).

RAPPEL SUR NEWTON

Rappel : comment résoudre $u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1})$? On a vu que l'éq. $x = u_n + h f(t_{n+1}, x)$ avait une unique sol. si h est assez petit. Pour l'approcher on résout $x - u_n - h f(t_{n+1}, x) = 0$ par Newton :

on part de x_0 ($= u_n$ p. exemple)

$$x_{n+1} = x_n - DN(x_n)^{-1} N(x_n)$$

On itère assez de fois pour espérer avoir une bonne approximation, ce qui est censé être le cas car la méthode de Newton a une convergence quadratique locale, i.e, si l'on part pas

trop loin de la solution (U_n p. ex n'est pas trop loin de U_{n+1} on espère !) ⑨
alors la suite x_n converge vers la solution, et la précision est doublée à chaque itération !!!

$$|x_{n+1} - x| \leq C |x_n - x|^{2}$$ ← le 2 de quadratique.

← la preuve en dimension 1 est classique. En dim. n, cf [Quarteroni], pas trop compliqué ! Et instructif.

En pratique, surtout ne pas inverser DN mais juste résoudre le système $DN(x_n) qqch = N(x_n)$, dans Matlab :

$$x_{n+1} = x_n - DN(x_n) \backslash N(x_n).$$

Bien sûr, $N(x)$ désignait partout

$$N(x) = x - U_n - h f(t_{n+1}, x)$$

et donc $DN(x) = Id - hDf(t_{n+1}, x)$
qui est inversible dès lors que h est assez petit par ouverture de $GL_n(\mathbb{R})$...