Université Paul Sabatier **Année 2013-2014**

Licence de Mécanique - Mathématiques I

Rappels d'algèbre linéaire - TD n°2

Exercice 1.

1. Montrer que les valeurs propres d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) sont égales aux coefficients de sa diagonale.
2. Montrer que le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses valeurs propres (chacune comptée autant de fois que sa multiplicité algébrique).
3. Montrer que la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres (chacune comptée autant de fois que sa multiplicité algébrique).

Exercice 2. (Matrice compagnon)

Étant donnés n coefficients (réels ou complexes) $a_0, \ldots, a_{n-1}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est appelée matrice compagnon du polynôme

$$p(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n.$$

Montrer que le polynôme caractéristique de A est égal à $(-1)^n p(X)$.

Exercice 3.

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le spectre de ces matrices.
2. Déterminer si ces matrices sont diagonalisables.
3. Déterminer pour chaque matrice un changement de base donnant soit une matrice diagonale (dans le cas d'une matrice diagonalisable), soit une matrice constituée de blocs de Jordan (décomposition de Jordan dans le cas d'une matrice non diagonalisable).

Exercice 4. (Matrice circulante)

On considère la matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^k pour $k < n$. Montrer que $A^n = I_n$.
2. Montrer que le polynôme caractéristique $p_A(X)$ de A est donné par

$$p_A(X) = (-1)^n \, (X^n - 1).$$

   Déterminer le spectre de A et en déduire que la matrice est diagonalisable.
3. Étant donnés n coefficients (réels ou complexes) $a_0, \dots, a_{n-1}$, on définit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & & \ddots & a_0 & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

   Écrire la matrice B sous forme d'une combinaison linéaire des n matrices itérées de A : $A^0 = I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n-1}$. Les matrices A et B sont dites circulantes.
4. Sachant que la matrice A est diagonalisable, en déduire qu'il en est de même pour la matrice B.
5. Déterminer les valeurs propres de B.