Sur les idempotents de $k[u]$

Laurent DIETRICH *

26 mai 2011

Résumé

Le rapport de jury 2010 mentionne, à la leçon sur les polynômes d'endomorphismes : « le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction et structure de cette algèbre K[u]. Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques ». Suivant des indications de Michel Coste, par une jolie utilisation du lemme chinois on peut montrer que si u est trigonalisable, les seuls idempotents de $k[u]$ sont les sommes de projecteurs spectraux.

En notant $\pi_u = \prod_{i=1}^r Q_i^{\alpha_i}$ la décomposition en irréductibles du polynôme minimal de u ($Q_i = X - \lambda_i$), on a l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\mathbb{C}[u] \cong \mathbb{C}[X]/(\pi_u) \cong C[X]/(Q_1^{\alpha_1}) \times \cdots \times C[X]/(Q_r^{\alpha_r})$$

par théorème chinois.

Cet isomorphisme d'anneau envoie bien sûr nilpotent sur nilpotent et réciproquement. Les idempotents à droite sont facile à déterminer, c'est l'ensemble produit des idempotents sur chaque facteur, qui eux se trouvent comme suit :

$$E^2 = E \bmod Q_i^{\alpha_i} \Leftrightarrow E(E-1) = 0 \bmod Q_i^{\alpha_i} \Leftrightarrow E = 0 \bmod Q_i^{\alpha_i} \text{ ou } E = 1 \bmod Q_i^{\alpha_i}$$

car E et $E-1$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$ et Q_i est un élément irréductible de cet anneau. Les idempotents de $\mathbb{C}[u]$ correspondent donc bijectivement aux $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ de l'algèbre produit ci-dessus.

C'est toutes les sommes possibles de projecteurs sur les sous-espaces caractéristiques : obtenir une relation de Bézout sur les $(R_i)_i = (\prod_{j \neq i} Q_j^{\alpha_j})_i$, et évaluer en u. On obtient des polynômes U_j tels que $1 = \sum U_j R_j$ et on peut montrer que $e_i(u) := U_i R_i(u)$ est le projecteur sur le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i [1]. L'élément défini par $\varepsilon_j = \delta_{ij}$ est bien envoyé sur e_i par la réciproque de l'isomorphisme chinois (ça vient directement de $1 = \sum e_j$). Puis cet isomorphisme réciproque envoie $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ sur $\sum \varepsilon_i e_i$ ce qui conclut.

*http://perso.eleves.bretagne.ens-cachan.fr/∼ldiet783

1. cf. une preuve de la décomposition de Dunford – en les notant p_i on a bien $p_i^2 = p_i$, $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$ et donc les doubles produits dans le carré d'une somme vont s'en aller pour laisser la somme des carrés, donc la somme, ce qui montre qu'une somme de tels projecteurs est bien un projecteur.